MÉMOIRES DE LA S. M. F.

Y. FÉLIX

Dénombrement des types de K-homotopie. Théorie de la déformation

Mémoires de la S. M. F. 2e série, tome 3 (1980)

<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1980_2_3__1_0>

© Mémoires de la S. M. F., 1980, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mémoires de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Memoires/Presentation.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

INTRODUCTION

Comment classifier les différents types d'homotopie rationnelle de même algèbre de cohomologie ? Sous quelles conditions n'existe-t-il qu'un seul type d'homotopie rationnelle admettant une algèbre de cohomologie donnée ? Comment varient les invariants de la topologie algébrique classique à l'intérieur d'une même algèbre de cohomologie ? ... C'est à ces différentes questions que nous désirons donner une réponse.

Un pas décisif avait été franchi vers la classification par Halperin et Stasheff [10] lors de leur construction du modèle bigradué $(\wedge Z,d)$ d'une algèbre graduée commutative H et du modèle filtré $(\wedge Z,D)$ d'une algèbre graduée commutative différentielle (A,d_A). Nous rappellerons leur définition au chapitre 0. Le modèle bigradué est un modèle formel de cohomologie H. Il est dit intrinsèquement formel ssi il n'existe qu'un seul type d'homotopie rationnelle réalisant H.

Les différents modèles filtrés d'une cohomologie H forment une variété algébrique W sur laquelle opère un groupe algébrique G et telle que les différentes orbites représentent les différents types d'homotopie rationnelle de cohomologie H. Cette théorie se généralise à tout corps k de caractéristique o. Nous obtenons ainsi les différents types de k-homotopie. Une propriété apparaît lors de l'examen de ces variétés W : la rigidité.
Un espace X est dit rigide ssi son orbite est ouverte dans W_k pour une extension algébriquement close k. (Si X est construit par tour de Postnikov, ceci signifie que le type d'homotopie ne change pas lors de légères modifications des invariants de Postnikov). L'importance de cette notion est liée au théorème suivant :

<u>Théorème</u> : Un espace formel est k-rigide ssi il est intrinsèquement formel.

Adaptant les méthodes de déformation de Gerstenhaber [9], Nijenhuis [14] ... nous interpréterons la rigidité en termes de groupes de cohomologie de l'espace gradué différentiel des dérivations du modèle bigradué (groupes de F-cohomologie).

<u>Proposition 1</u> : 1) L'espace vectoriel ${}_FZ^1(X)$ est isomorphe à l'espace tangent de Zariski à W en X tandis que l'espace vectoriel ${}_FB^1(X)$ est isomorphe à l'espace tangent de Zariski à l'orbite de X.

2) Si ${}_FH^1(X) = o$ alors X est rigide.

<u>Proposition 2</u> : Si ${}_FH^2(X) = o$, alors X est rigide ssi ${}_FH^1(X) = o$.

L'introduction du concept de rigidité et de la F-cohomologie nous permettra d'énoncer quelques propositions de finitude du nombre de types de k-homotopie.

Proposition 3 : 1) Si X est un espace formel d'une cohomologie H pour laquelle il existe un espace rigide, et si $\dim {}_F H^1(X) = 2$, alors il n'existe qu'un nombre fini de types d'homotopie réelle.

2) Si X est un espace formel tel que $\dim {}_F H^1(X) = 1$, alors il n'existe au maximum que deux types d'homotopie complexe, et les types non formels sont rigides.

Proposition 4 : Si $H^p = o \quad o < p \leqslant 1$ et $p > 5l+2$, alors ${}_F H^1(X)$ mesure l'obstruction à la rigidité de X.

Proposition 5 : Si $H^p = o \quad o < p \leqslant 1$ et $p > 4l+1$, et si $\dim {}_F H^1(X) > \dim \mathrm{aut}.H$ pour un X quelconque de cohomologie H, alors il existe une infinité de types d'homotopie réelle distincts.

Si X est formel, l'espace ${}_F H^1(X)$ est muni d'une filtration inférieure ${}_F H^1_{\geqslant p}(X)$ correspondant à une décomposition de l'espace tangent ${}_F Z^1(X)$ en espaces tangent ${}_F Z^1_{\geqslant p}(X)$ à une suite de sous-variétés emboîtées W_p formées d'espaces pour lesquels les i-produits de Massey matriciels [13] sont nuls pour $3 \leqslant i \leqslant p+2$. Soit X un espace formel et Y un autre espace de même cohomologie, nous construisons au § 5 une suite $O_p(Y)$ d'obstructions à l'existence d'une équivalence d'homotopie rationnelle entre X et Y.
Ces obstructions $O_p(Y)$ appartiennent aux groupes ${}_F H^1_p(X)$.
Halperin et Stasheff avaient déjà construit semblable suite d'obstructions $O_p(D)$ logeant dans les quotients $\mathrm{Hom}^1(Z_p, H^*)/\gamma(M_n)$ [10].
Nous construirons explicitement un monomorphisme ${}_F H^1_p(X) \to \mathrm{Hom}^1(Z_p, H^*)/\gamma(M_n)$ et nous illustrerons au moyen de quelques exemples l'avantage de nos obstructions.

Le texte se termine par une étude des fonctions α semi-continues supérieurement sur W, c'est-à-dire vérifiant $\alpha(X) \geqslant \alpha(Y)$ si X appartient à l'adhérence de l'orbite de Y.

Proposition : 1) Un espace formel maximise sur W toutes les fonctions semi-continues supérieurement.

2) Les fonctions $\dim {}_F H^i(Y)$, $\dim \pi^i_\psi(Y)$, ... sont semi-continues supérieurement.

Signalons enfin que Lemaire et Sigrist [12] d'une part, Schlessinger et Stasheff [16] d'autre part, ont obtenu indépendamment des résultats assez proches des nôtres. Les démarches sont cependant extrêmement différentes et complémentaires.

INTRODUCTION

Nous tenons à remercier D. Lehmann, ainsi que toute l'équipe de Topologie algébrique de Lille, pour l'aide précieuse apportée dans l'élaboration de ce texte.

CHAPITRE 0. PRÉLIMINAIRES

a) Préliminaires algébriques : Modèles minimaux.

- Dans tout ce qui suit, k désignera un corps de caractéristique nulle. Tous les espaces vectoriels, algèbres, ... sont définis sur k.
- Un espace vectoriel gradué (V^p), $p \in \mathbb{N}$, est une somme directe $V = \bigoplus_{p \geq 0} V^p$ d'espaces vectoriels.
- Une k-algèbre graduée (A^p), $p \in \mathbb{N}$ est un k-espace vectoriel gradué muni d'une multiplication associative

$$A^p \times A^q \to A^{p+q}.$$

L'on notera $|a|$ le degré de a. Si $a \in A^p$ $|a| = p$.
Une k-algèbre graduée (A^p), $p \in \mathbb{N}$ est dite commutative si pour tout $a \in A^p$, $b \in A^q$

$$ab = (-1)^{pq}\, ba.$$

- Une dérivation de degré r $(r \in \mathbb{Z})$ sur (A^p) est une application linéaire $D : A^p \to A^{p+r}$ vérifiant

$$D(ab) = D(a) \,.\, b + (-1)^{|a|r}\, a \,.\, D(b).$$

Nous noterons $\mathrm{Der}^r(A)$ l'ensemble des r-dérivations de A.
- Une algèbre différentielle graduée commutative (A,d) est une algèbre graduée commutative A munie d'une dérivation de degré 1 vérifiant $d^2 = 0$.
Nous adopterons les abréviations A.G.C. pour algèbre graduée commutative et A.D.G.C. pour algèbre différentielle graduée commutative.
- Nous appellerons différentielle toute dérivation de degré 1 de carré nul.

Soit X^* un espace vectoriel gradué, nous noterons $\wedge X^*$ l'algèbre commutative libre sur X^*.
Décomposons $X^* = P^* \oplus Q^*$ où P^* est l'espace vectoriel des éléments de degré impair et Q^* l'espace vectoriel des éléments de degré pair.
Alors $\wedge X^*$ est isomorphe au produit tensoriel de l'algèbre extérieure sur P^* par l'algèbre symétrique sur Q^*.

$$\wedge X^* \xrightarrow{\sim} E(P^*) \otimes S(Q^*).$$

La cohomologie de (A,d_A) est l'A.G.C. H(A) donnée par $\mathrm{Ker.}\, d_A/\mathrm{Im.}\, d_A$.
Un homomorphisme φ d'A.D.G.C. de (A,d_A) dans (B,d_B) est un homomorphisme de k-algèbres de degré zéro commutant avec les dérivations : $\varphi\, d_A = d_B\, \varphi$.
On notera φ^* l'homomorphisme d'A.G.C. induit en cohomologie.
Un quasi-isomorphisme φ d'A.D.G.C. de (A,d_A) dans (B,d_B) est un homomorphisme φ tel que φ^* soit un isomorphisme.
Une A.D.G.C. (A,d_A) est dite *c-connexe* si H(A) est connexe.
Un K - S complexe connexe (Koszul - Sullivan) est une A.D.G.C. de la forme $(\wedge X,D)$ où $X = \sum_{p \geq 0} X^p$ est un espace vectoriel gradué satisfaisant la condition (1).

(1) Nilpotence : Il existe une base homogène $\{x_\alpha\}_{\alpha \in S}$ de X indexée par un ensemble

bien ordonné S telle que Dx_α appartient à l'algèbre engendrée par les x_β avec $\beta < \alpha$.

Il est dit minimal s'il satisfait la condition (2).

(2) Minimalité : $D(X) \subset (\wedge^+X)(\wedge^+X)$ (équivaut à : $\alpha \to$ dim. $|x_\alpha|$ est une application croissante).

Soit $(\wedge X,d)$ un K - S complexe connexe. Nous noterons par $(\wedge X,D)^I$ l'A.D.G.C. $(\wedge X \otimes \wedge\bar{X} \otimes \wedge\hat{X},D)$ avec

1) $D \mid \wedge X = d$
2) $\bar{X}^p = X^{p+1}$
3) $\hat{X}^p \xrightarrow{\sim} X^p$
4) $D\bar{X} = \hat{X}$
5) $D\hat{X} = 0$.

Un automorphisme α de $(\wedge X,D)^I$ est alors construit en posant $\alpha(a) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \gamma^n(a)$ $= e^\gamma$ où $\gamma = Di + iD$ avec i une dérivation de degré -1 $\begin{cases} ix = \bar{x} \\ i\bar{x} = 0 \\ i\hat{x} = 0. \end{cases}$

Si φ_0, φ_1, $(\wedge X,D) \to (A,d_A)$ sont deux homomorphismes d'A.D.G.C., une homotopie de φ_0 à φ_1 est un homomorphisme d'A.D.G.C.

$$\phi : (\wedge X,D)^I \to (A,d_A) \text{ tel que}$$
$$\phi \mid \wedge X = \varphi_0 \text{ et } \varphi_1 = \phi\,\alpha|_{\wedge X}$$

φ_0 et φ_1 sont alors dits homotopes : $\varphi_0 \simeq \varphi_1$.

THEOREME (Sullivan).

1) Soit (A,d_A) une A.D.G.C. c-connexe. Il existe un K - S complexe connexe minimal (M_A,δ_A) et un homomorphisme $\rho_A : (M_A,\delta_A) \to (A,d_A)$ tel que ρ_A^* est un isomorphisme.
2) Si $\rho'_A : (M'_A,\delta'_A) \to (A,d_A)$ est une autre solution du problème, il existe un isomorphisme $\varphi : (M'_A,\delta'_A) \to (M_A,\delta_A)$ uniquement défini à homotopie près tel que $\rho_A \circ \varphi \simeq \rho'_A$.

Deux A.D.G.C. (A,d_A) et (B,d_B) sont dites *c-équivalentes* si leurs modèles minimaux sont isomorphes. On dit alors qu'elles ont même type de k-homotopie.

Il revient au même de dire qu'il existe une suite finie de quasi-isomorphismes. $(A_1,d_1) \leftarrow (A_2,d_2) \to (A_3,d_3) \leftarrow \ldots\ldots \to (A_n,d_n)$ avec $(A_1,d_1) = (A,d_A)$ et $(A_n,d_n) = (B,d_B)$.

b) Théorie de Sullivan.

Soit X un espace topologique connexe nilpotent, $C_*(X,Q)$ l'espace vectoriel des chaînes rationnelles sur X et Δ_p^q l'espace vectoriel des q-formes polynomiales à coefficients rationnels sur l'espace $\Delta_p = \{(t_0, \ldots, t_p) \in \mathbb{R}^{p+1} \mid \Sigma t_i = 1\}$.

Δ_p^* est une A.D.G.C. avec la différentielle extérieure comme dérivation.

Δ_*^q est l'espace vectoriel simplicial des q-formes rationnelles sur l'ensemble simplicial Δ_*.

Désignons par $\Sigma(X)$ l'ensemble simplicial des simplexes singuliers de X.

Une P.L. forme rationnelle de degré q sur X est une application simpliciale $\omega : \Sigma(X) \to \Delta_*^q$ qui à tout r - simplexe σ associe une q forme ω_σ sur Δ_r.

Notons $A_{PL}^q(X)$ cet espace.

Munissons les formes du produit extérieur $(\omega \wedge \omega')_\sigma = \omega_\sigma \wedge \omega'_\sigma$. $A_{PL}^*(X)$ devient une Q-A.G.C. La différentielle extérieure $(d\omega)_\sigma = d_{DR}\,\omega_\sigma$ en fait une Q-A.D.G.C.

L'intégration fournit une application *d'espaces vectoriels* différentiels gradués

$$A_{PL}^*(X) \to C^*(X,Q)$$

induisant un isomorphisme *d'algèbres graduées*

$$H^*(A_{PL}^*(X),d) \xrightarrow{\sim} H^*(X,Q).$$

Il s'en suit que le foncteur A_{PL} transforme une équivalence rationnelle d'homotopie d'espaces connexes nilpotents en une équivalence d'homotopie d'A.D.G.C.

Inversement : soit un K - S complexe minimal (A,d_A).

Sullivan construit un espace connexe nilpotent $< A >$, sa réalisation géométrique, tel que les foncteurs $X \to A_{PL}(X)$ et $A \to < A >$ sont adjoints et induisent une équivalence de catégorie entre la catégorie des types d'homotopie rationnelle d'espaces nilpotents et la catégorie homotopique des A.D.G.C. connexes nilpotentes.

On déduit de ceci que deux espaces ont même type rationnel d'homotopie ssi les A.D.G.C. correspondantes sont c-équivalentes.

L'espace vectoriel gradué des générateurs du modèle minimal de (A,d_A) est appelé *espace de pseudo-homotopie* de (A,d_A) et est noté $\pi_\psi^*(A,d_A)$.

Th. : Si X est un c.w. complexe simplement connexe, et plus généralement nilpotent (c'est-à-dire dont le groupe fondamental est nilpotent et opère de façon nilpotente sur les groupes d'homotopie de dimension supérieure),

alors $\pi_\psi^*(A_{PL}(X),d) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}\,(\pi_*(X),Q)$.

c) Modèle bigradué d'une A.G.C. et modèles filtrés d'A.D.G.C.

- Soit H une A.G.C. connexe. Il existe un modèle minimal $\rho : (\wedge Z,d) \to (H,o)$ (o pour dérivation nulle) avec 1) Z est un espace vectoriel bigradué $Z = \bigoplus_{\substack{p\geq 0\\ q\geq 0}} Z_q^p$

p : dimension

q : degré de graduation inférieure.

2) $d : Z^p_q \to (\wedge Z)^{p+1}_{q-1}$, ceci munit l'algèbre de cohomologie $H(\wedge Z,d)$ d'une graduation inférieure $H_p(\wedge Z,d)$.

Il faut en outre que :

3) $\rho : \wedge Z_o \to H$ soit surjective.

4) $H_o(\wedge Z,d) \xrightarrow{\sim} H$.

5) $H_p(\wedge Z,d) \xrightarrow{\sim} o \qquad p > o$.

Un élément z de $\wedge Z$ est dit de degré de filtration inférieure à p s'il appartient à $(\wedge Z)_{\leqslant p}$. La construction explicite se trouve dans H - S. [10].
$(\wedge Z,d) \xrightarrow{\rho} (H,o)$ est appelé <u>le modèle bigradué</u> de H. Il est défini à isomorphisme près.

- Soit (A,d_A) une A.D.G.C. c-connexe et $(\wedge Z,d) \xrightarrow{\rho} (H^*(A),O)$ le modèle bigradué de l'A.G.C. $H^*(A)$, alors il existe une dérivation D de carré nul sur $\wedge Z$ et une application d'A.D.G.C. $\varphi : (\wedge Z,D) \to (A,d_A)$ telles que

1) $(D-d) : Z_n \to (\wedge Z)_{\leqslant n-2}$

2) φ^* est un isomorphisme

3) $\forall_z \in \wedge Z_o \qquad \varphi^*([z]) = \rho z$.

D'autre part, si $\varphi' : (\wedge Z,D') \to (A,d_A)$ satisfait également ces propriétés, il existe un isomorphisme $\psi : (\wedge Z,D) \to (\wedge Z,D')$ tel que : 1) le diagramme suivant commute à homotopie près

$$\begin{tikzcd}
(\wedge Z,D) \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "\psi"'] & & (A,d_A) \\
& (\wedge Z,D') \arrow[ur, "\varphi'"'] &
\end{tikzcd}$$

2) ψ - Id. baisse la filtration d'au moins une unité. Un pareil modèle $\varphi : (\wedge Z,D) \to (A,d_A)$ est dit *filtré*. Il est obtenu à partir d'une perturbation de la différentielle d sur $\wedge Z$.

Une A.D.G.C. (A,d_A) est dite *formelle* si elle est c-équivalente à $(H(A),o)$. On peut alors prendre D=d. Modèles filtrés et bigradués coïncident.

Soit (A,d_A) une Q-A.D.G.C.

Si A est formelle, il est clair que, pour tout corps K de caractéristique o, $A \otimes_Q K$ est également formelle. Réciproquemment, Halperin et Stasheff ont montré : il suffit qu'il existe K tel que $A \otimes_Q K$ soit formelle pour que A soit formelle.

Une A.D.G.C. (A,d_A) c-connexe est dite *intrinsèquement formelle* si toutes les

A.D.G.C. avec algèbre de cohomologie isomorphe à $H^*(A)$ sont formelles, c'est-à dire s'il n'existe pour la cohomologie $H^*(A)$ qu'un seul type rationnel d'homotopie (dont le modèle est le modèle bigradué de $(H^*(A), d=o)$).

CHAPITRE 1. VARIÉTÉ DES TYPES DE K-HOMOTOPIE DE k-ALGÈBRE DE COHOMOLOGIE H

Soient (A,d_A) et (B,d_B) deux A.D.G.C. c-connexes. Supposons qu'il existe un isomorphisme $f : H^*(A) \to H^*(B)$. Désignons par $\rho_A : (\wedge Z,d) \to (H^*(A),o)$ le modèle bigradué de $H^*(A)$. Alors : $f_o\ \rho_A$ est un modèle bigradué de $H^*(B)$.

Ces modèles peuvent être déformés en des modèles filtrés :

$\varphi_A : (\wedge Z,D_A) \to (A,d_A)$ et $\varphi_B : (\wedge Z,D_B) \to (B,d_B)$.

Halperin et Stasheff ont démontré [10] le théorème suivant :

<u>Théorème</u> : f peut être réalisée par une équivalence d'homotopie ssi il existe un isomorphisme d'A.D.G.C. $\varphi : (\wedge Z,D_A) \to (\wedge Z,D_B)$ tel que φ-id. décroît la filtration d'au moins une unité. □

L'inconvénient de cette formulation était que les morphismes ρ_A et ρ_B des modèles bigradués $[(\wedge Z,d),\rho_A]$ et $[(\wedge Z,d),\rho_B]$ sont différents. Nous désirons éviter cette dépendance.

Fixons une A.G.C. H^* ainsi qu'un modèle bigradué $(\wedge Z,d) \xrightarrow{\rho} (H^*,o)$. Réalisons chaque automorphisme h de H^* par un automorphisme $\bar{h}$ de $(\wedge Z,d)$. L'ensemble des automorphismes h de H agit sur les endomorphismes linéaires de $\wedge Z$ par la formule $D \to \bar{h}\ D\ \bar{h}^{-1}$.

<u>Lemme</u> : Soit $(\wedge Z,D) \xrightarrow{\varphi} (A,d_A)$ un modèle filtré de modèle bigradué $(\wedge Z,d) \xrightarrow{\rho} H^*$ et f un automorphisme de H^* réalisable par un automorphisme f de $(\wedge Z,d)$, alors $(\wedge Z,\ f^{-1}\ D\ f) \xrightarrow{\varphi\ \bar{f}} (A,d_A)$ est un modèle filtré de modèle bigradué $f\rho$.

<u>Démonstration</u> : le modèle bigradué est $\rho f = f\rho$. □

Alors,

<u>Proposition 1</u> : 1) Toute A.D.G.C. (A,d_A) d'algèbre de cohomologie isomorphe à H^* a un modèle filtré $(\wedge Z,D_A) \xrightarrow{\varphi} (A,d_A)$ de modèle bigradué $(\wedge Z,d) \xrightarrow{\rho} (H^*,O)$ fixé.

2) Deux pareils modèles filtrés $(\wedge Z,D_A)$ et $(\wedge Z,D_B)$ sont c-équivalents ssi il existe un isomorphisme $\varphi : (\wedge Z,D_A) \to (\wedge Z,D_B)$ de la forme $\psi_o\ \theta$ où θ est un automorphisme de bidegré (o,o) induit par un automorphisme de H^* et ψ est un automorphisme de $\wedge Z$ tel que ψ-id décroît la filtration d'au moins une unité.

<u>Démonstration</u> : résulte du lemme. □

Nous supposerons toujours dans ce qui suit que la k-algèbre H^* vérifie les conditions suivantes :