MÉMOIRES DE LA S. M. F.

L. BEGUERI

Dualité sur un corps local à corps résiduel algébriquement clos

Mémoires de la S. M. F. 2e série, tome 4 (1980)

<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1980_2_4__1_0>

DUALITÉ SUR UN CORPS LOCAL
A CORPS RÉSIDUEL ALGÉBRIQUEMENT CLOS

LUCILE BÉGUERI (*)

Résumé : La définition par Serre d'une structure proalgébrique sur le groupe des unités d'un corps local à corps résiduel algébriquement clos, en inégale caractéristique, soulevait des questions de dualité qui sont abordées ici pour les groupes finis, les tores, les variétés abéliennes. Les dualités obtenues sont de nature quasi-algébrique sur le corps résiduel. Par exemple on obtient, pour une variété abélienne A sur le corps local K, un isomorphisme canonique entre le groupe des classes des K-torseurs sous A et le groupe des classes des isogénies à noyau cyclique (sur le corps résiduel), dont le but est le groupe proalgébrique des K-points de la variété abélienne duale.

The definition by Serre of a proalgebraic structure on the group of units of a local field with algebraically closed residue field, of unequal characteristic, gives rise to questions of duality, whose study we begin here, for finite groups, tori, and abelian varieties. We obtain dualities of a quasi-algebraic nature over the residue field. For example, for an abelian variety A over the local field K, we obtain a canonical isomorphism between the group of classes of K-torseurs under A and the group of classes of isogenies with cyclic kernel (over the residue field), and whose image is the pro-algebraic group of K-rational points of the dual abelian variety.

(*) Thèse de Sciences Mathématiques, Université de Paris-Sud, Centre d'Orsay, juin 1976.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

0.1. Comme on sait, la théorie du corps de classes, lors de son expression cohomologique, a été enrichie de théorèmes de dualité. Sur un corps local K, à corps résiduel k fini, en inégale caractéristique, ces théorèmes sont essentiellement de trois types, selon qu'ils concernent les modules galoisiens finis, les modules galoisiens qui sont $\mathbb{Z}$-libres de rang fini, ou les variétés abéliennes. Tous utilisent cependant l'identification canonique du groupe de Brauer $Br(K) = H^2(K,\mathbb{G}_m)$ avec $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ ([23], chap. XIII).

a) Pour un module galoisien fini X, dont on note X' le dual de Cartier, les groupes de cohomologie $H^0(X)$ et $H^2(X')$ d'une part, $H^1(X)$ et $H^1(X')$ d'autre part, sont finis et mis en dualité par le cup-produit à valeurs dans le groupe de Brauer de K.

b) Pour un module galoisien $\mathbb{Z}$-libre de type fini, c'est-à-dire le groupe des caractères d'un K-tore, les dualités obtenues par Tate et Nakayama à partir de la théorie des formations de classes d'Artin-Tate sont déduites du cup-produit dans le groupe de Brauer de K.

c) Pour une variété abélienne, la dualité de Tate apparie le groupe des classes de K-torseurs sous cette variété ("groupe de Weil-Châtelet") avec le groupe compact des points rationnels sur K de la variété abélienne duale.

Puisque, en inégale caractéristique, la cohomologie (aussi bien étale que fppf) d'un schéma en groupes commutatifs sur K coïncide avec la cohomologie galoisienne de son groupe de points à valeurs dans une clôture algébrique de K, ces théorèmes de dualité peuvent tout aussi bien s'exprimer par des dualités entre les groupes de cohomologie des schémas en groupes correspondants. Par contre, lorsque X est un schéma en groupes fini commutatif et plat sur l'anneau R des entiers de K, il convient de considérer les groupes de cohomologie fppf $H^i(R,X)$: B. Mazur ([13]) a obtenu une dualité entre les groupes $H^1(R,X)$ et $H^1(K,X')/H^1(R,X')$, à valeurs dans $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$, et cette dualité est compatible avec la dualité sur K considérée dans a).

0.2. Lorsque le corps résiduel k du corps local K, au lieu d'être fini, est algébriquement clos, et que nous sommes toujours en inégale caractéristique (c'est-à-dire lorsque K est une extension finie du corps des fractions de l'anneau $W(k)$ des vecteurs de Witt de longueur infinie à coordonnées dans k), le groupe de Brauer de K est nul ([24]), ce qui a des conséquences importantes : les tores sont cohomologiquement triviaux, et les groupes de cohomologie, à partir du second, des schémas en groupes finis commutatifs sur K sont nuls. Au contraire de ce qui se passe dans le cas d'un corps p-adique, le premier groupe de cohomologie d'un K-schéma en groupes fini n'est pas, en général, un groupe fini (il suffit de considérer $H^1(K,\mu_p)$, où $p > 0$ est la caractéristique de k : ce groupe, égal à K^*/K^{*p} contient en effet le corps algébriquement clos k) ; mais comme on le verra, il a une structure naturelle de groupe quasi-algébrique (au sens de [21]) sur k. Cette propriété intervient de manière essentielle dans les théorèmes de dualité établis ici, la dualité de Serre des k-groupes quasi-algébriques unipotents connexes remplaçant la dualité de Pontrjagin des groupes finis.

Les difficultés proviennent surtout des p-groupes finis, p étant la caractéristique de k ; car si l'ordre du K-groupe fini X est premier à p, le groupe $H^1(K,X)$ est fini, et le cup-produit à valeurs dans $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ le met en dualité avec le groupe des K-points de son dual de Cartier. Ceci résulte par exemple de ([10], I, n° 5) ou de ([6], Dualité, n° 1).

Quant aux résultats sur les variétés abéliennes, il faut citer les travaux de Ogg, Šafarevič, et Vvedenskii. Ogg et Šafarevič, indépendamment, ont exprimé le groupe des classes de K-torseurs sous la variété abélienne A, où l'on néglige la p-torsion, comme le dual de Pontrjagin du groupe profini $\pi_1(A'(K))$, groupe fondamental du k-groupe proalgébrique (au sens de [21]) des K-points de la variété abélienne duale A', où l'on néglige aussi la p-torsion ([18]). Quant à Vvedenskii, qui se pose le problème de la partie de p-torsion, il a traité divers cas particuliers de courbes elliptiques, par des méthodes de groupes formels ([21]).

0.3. Entrons maintenant dans le détail du présent travail. Tous les schémas en groupes considérés ici sont commutatifs.

Le point de départ est une remarque de Serre, page 55 de "Groupes proalgébriques" ([21]) : "Si U est un groupe unipotent connexe quasi-algébrique, il y a, sur $U^* = \mathrm{Ext}^1(U,\mathbb{Q}/\mathbb{Z})$, une structure canonique de groupe unipotent connexe quasi-algébrique ; la correspondance $U \mapsto U^*$ jouit de propriétés analogues à celles que l'on rencontre dans la dualité des variétés abéliennes ; on a $U^{**} = U$, etc...".

Le développement de cette remarque constitue le §1. Les résultats y sont, en fait, étendus au cas d'un corps de base parfait de caractéristique $p > 0$. Après avoir décrit, sur un schéma affine quelconque de caractéristique p, les isogénies dont le but est le groupe additif $\mathbb{G}_a$ et dont le noyau est $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, on voit ce qu'il advient lorsqu'on remplace $\mathbb{G}_a$ par le schéma W_n des vecteurs de Witt de longueur n, et $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ par $\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$, ceci sur un schéma affine parfait quelconque. On passe alors au cas général d'un groupe quasi-algébrique (au sens de [21],1.2, ou de [7],5.3.4) unipotent connexe quelconque G : son dual de Serre G^*, dont les points à valeurs dans un schéma affine parfait sont les classes d'isogénies dont le but est G et le noyau cyclique constant, est lui-même muni d'une structure de groupe quasi-algébrique unipotent connexe, via des résolutions par des produits finis de groupes quasi-algébriques de vecteurs de Witt de longueur finie. Les groupes G et G^* sont isogènes, et la correspondance $G \mapsto G^*$ est un foncteur exact et involutif. En outre cette dualité de Serre des groupes quasi-algébriques unipotents connexes sur un corps parfait de caractéristique p s'étend en une autodualité $\mathcal{S}$ de la catégorie dérivée des complexes bornés formés de groupes quasi-algébriques unipotents, qui joue aussi un rôle essentiel dans [15].

Le §2 établit un lemme de rigidification des Ext^1 de deux faisceaux en groupes abéliens sur un site. De ce lemme, on déduit par exemple la "résolution lisse standard" d'un schéma en groupes fini et plat sur une base quelconque. En fait, la principale motivation de cette technique de rigidification apparaîtra au §8.

Le §3 précise quelques propriétés cohomologiques résultant de [24], en particulier la trivialité cohomologique des tores et quelques unes de ses conséquences.

Au §4, on précise la structure de k-groupe algébrique de $H^1(R,X)$, pour un schéma en groupes X fini et plat d'ordre une puissance de p sur l'anneau R des entiers de K, la cohomologie étant calculée au sens fppf ; on montre que ce k-groupe $\underline{H}^1(R,X)$ est affine, unipotent, connexe, et l'on calcule sa dimension par une méthode inspirée d'un calcul de caractéristique d'Euler-Poincaré dû à Mazur et Roberts ([14]). Les propriétés algébriques sont obtenues en plongeant X dans un groupe lisse, et en prenant la réalisation de Greenberg relative à R (au sens de [8]) du conoyau de ce plongement. D'autre part, pour un K-groupe fini X, tout plongement de X dans un tore définit, via la réalisation de Greenberg relative à R du modèle de Néron (au sens de [17]) du conoyau de ce plongement, un k-groupe algébrique dont le groupe des k-points est le groupe habituel $H^1(K,X)$ et dont le groupe quasi-algébrique associé $\underline{\underline{H}}^1(K,X)$ est indépendant du choix du plongement de X dans un tore. Le k-groupe $\underline{\underline{H}}^1(K,X)$ est affine, et sa composante neutre est unipotente. Par une méthode inspirée d'un calcul de caractéristique d'Euler-Poincaré dû à J. Tate ([25]), on calcule la dimension de $\underline{\underline{H}}^1(K,X)$. En outre, lorsque X provient d'un R-groupe fini et plat, le k-groupe quasi-algébrique $\underline{\underline{H}}^1(K,X)$ contient comme sous-groupe le groupe quasi-algébrique $\underline{\underline{H}}^1(R,X)$ associé à $\underset{\sim}{H}^1(R,X)$.

Le §5 est consacré à l'"isomorphisme de réciprocité". Lorsque le corps K contient les racines de l'unité d'ordre p^n, on cherche à classifier les extensions de K engendrées par une racine p^n-ième d'un élément non nul de K. Cette classification se déduit d'un isomorphisme dit "de réciprocité" du groupe $H^1(K,\mu_{p^n})$ avec le groupe des homomorphismes continus du groupe de Galois de l'extension abélienne maximale de K dans $\mu_{p^n}(K) = M_n$. Par la théorie du corps de classes de Serre ([24]), cet isomorphisme s'écrit :

$$H^1(K,\mu_{p^n}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{cont}(\pi_1(\underline{\underline{U}}_K),M_n) ,$$

ou encore comme un isomorphisme de groupes abéliens :

$$K^*/K^{*p^n} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Ext}^1_k(\underline{\underline{U}}_K,M_n) ,$$

où $\underline{\underline{U}}_K$ est le k-groupe proalgébrique des unités de K, dont $\pi_1(\underline{\underline{U}}_K)$ est le groupe fondamental. La source a une structure canonique de k-groupe quasi-algébrique unipotent ; le but aussi. L'essentiel du présent paragraphe consiste à établir la quasi-algébricité de cet isomorphisme de réciprocité. Pour cela, on est conduit, en quelque sorte, à "universaliser" la construction de l'isomorphisme de Serre.

Ces préparatifs permettent d'aborder au §6 la démonstration des théorèmes principaux de dualité pour les schémas en groupes finis sur

K . Soit X un K-groupe fini, et soit X' son dual de Cartier. Nous mettons en dualité (à valeurs dans $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$) le groupe $X'(K)$ des K-points de X' et le groupe $\pi_0(\underline{\underline{H}}^1(K,X))$, groupe des composantes connexes de $\underline{\underline{H}}^1(K,X)$. D'autre part, la composante neutre de $\underline{\underline{H}}^1(K,X)$ est canoniquement isomorphe au dual de Serre de la composante neutre de $\underline{\underline{H}}^1(K,X')$. La démonstration de ces résultats utilise, outre le changement du corps de base et l'isomorphisme de réciprocité, l'interprétation des H^1 comme des Ext^1 , puis, à la Yoneda, comme des classes de suites exactes. Lorsqu'on fixe un entier n et que l'on considère la catégorie $\mathcal{M}_n$ (resp. $\mathcal{Q}_n$) des K-groupes finis (resp. k-groupes quasi-algébriques) annulés par p^n , on peut voir que le prolongement $\underline{\underline{H}}^1 : \mathcal{K}^b(\mathcal{M}_n) \to \mathcal{K}^b(\mathcal{Q}_n)$ de $\underline{\underline{H}}^1 : \mathcal{M}_n \to \mathcal{Q}_n$ $(\underline{\underline{H}}^1(X) = \underline{\underline{H}}^1(K,X))$ à la catégorie des complexes bornés (à homotopie près) formés d'objets de $\mathcal{M}_n$, admet un dérivé gauche $L\underline{\underline{H}}^1 : D^b(\mathcal{M}_n) \to D^b(\mathcal{Q}_n)$ entre les catégories dérivées correspondantes. Les deux énoncés ci-dessus se regroupent alors dans ce cadre de catégories dérivées. On construit en effet canoniquement un isomorphisme du foncteur $L\underline{\underline{H}}^1$ sur le composé de la dualité de Serre dans $D^b(\mathcal{Q}_n)$, de $L\underline{\underline{H}}^1$ et de la dualité de Cartier dans $D^b(\mathcal{M}_n)$. On pourra comparer ceci avec [15].

Notons que, lorsque X est un R-groupe fini et plat, l'isomorphisme canonique entre la composante neutre de $\underline{\underline{H}}^1(K,X)$ et le dual de Serre de la composante neutre de $\underline{\underline{H}}^1(K,X')$ induit un isomorphisme (6.3.2) entre le k-groupe quasi-algébrique $\underline{\underline{H}}^1(R,X)$ et le dual de Serre du k-groupe quotient $\underline{\underline{H}}^1(K,X')^{\circ}/\underline{\underline{H}}^1(R,X')$. On rejoint ainsi des théorèmes de B. Mazur cités en 1.

Les résultats du §6 donnent une prise sur les tores et les variétés abéliennes, par l'intermédiaire de leurs points d'ordre fini. Le §7 exploite cette situation. Dans le cas d'une variété abélienne à bonne réduction, il y a une structure quasi-algébrique canonique sur