

# MÉMOIRES DE LA S. M. F.

NGUYEN TIEN DAI

NGUYEN HUU DUC

FRÉDÉRIC PHAM

## **Singularités non dégénérées des systèmes de Gauss-Manin réticulés**

*Mémoires de la S. M. F. 2<sup>e</sup> série*, tome 6 (1981)

[http://www.numdam.org/item?id=MSMF\\_1981\\_2\\_6\\_\\_1\\_0](http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1981_2_6__1_0)

© Mémoires de la S. M. F., 1981, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mémoires de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Memoires/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

# SINGULARITÉS NON DÉGÉNÉRÉES DES SYSTÈMES

## DE GAUSS-MANIN RÉTICULÉS

### § 0 - INTRODUCTION

Soit  $X$  un germe de variété analytique complexe muni d'un diviseur à croisements normaux à  $r$  composantes  $X_1, X_2, \dots, X_r$ .

Pour tout  $\sigma \subset I_r = \{1, 2, \dots, r\}$ , on posera  $X_\sigma = \bigcap_{i \in \sigma} X_i$  (en particulier  $X_\emptyset = X$ ). On notera  $\underline{X}$  la famille  $(X_\sigma)_{\sigma \in \mathcal{P}(I_r)}$ , que l'on appellera (germe de) variété r-réticulée.

Soit  $x_1, x_2, \dots, x_N$  un système de coordonnées locales sur  $X$  tel que  $x_i$  soit l'équation de  $X_i$  pour  $i=1, 2, \dots, r$ .

Pour tout multi-indice  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_r)$  on notera  $\mathcal{O}_X^{(\alpha)}$  le  $\mathcal{D}_X$ -module à gauche, quotient de l'anneau  $\mathcal{D}_X$  des germes d'opérateurs différentiels analytiques par l'idéal à gauche engendré par  $x_1^{D_{x_1} - \alpha_1}, \dots, x_r^{D_{x_r} - \alpha_r}, D_{x_{r+1}}, \dots, D_{x_N}$  ( $D_{x_i}$  désigne l'opérateur de dérivation par rapport à  $x_i$ ).

Ce  $\mathcal{D}_X$ -module  $\mathcal{O}_X^{(\alpha)}$  ne dépend pas du système de coordonnées choisi, et c'est évidemment un système holonome, dont la variété caractéristique est l'union des  $2^r$  composantes lisses  $T_{X_\sigma}^* X$  (fibrés conormaux dans  $X$  aux sous-variétés  $X_\sigma$ ).

Le but de cet article est d'étudier ce que nous appellerons les "systèmes de Gauss-Manin réticulés", images directes microlocales du  $\mathcal{D}_X$ -module  $\mathcal{O}_X^{(\alpha)}$  par des germes d'applications  $F : X \rightarrow Y$ , sous une hypothèse de "non dégénérescence" de  $F$  par rapport à la variété réticulée  $\underline{X}$  qui garantit notamment que l'image directe est non caractéristique.

N.B. L'essentiel de ce travail a été fait lors d'un séjour de 10 mois du dernier auteur à l'Institut de Mathématiques de Hanoi, dans le cadre de la Coopération Scientifique Franco-Viêtnamienne.

Deux cas particuliers importants sont le cas ( $r=0$ ) des systèmes de Gauss-Manin "ordinaires"  $(\theta_{\underline{X}}^{(\alpha)} = 0_{\underline{X}})$ , qui donnent tous les systèmes microdifférentiels holonomes à caractéristique simple, et le cas ( $r=1$ ) des "systèmes de Gauss-Manin d'applications à bord" qui donnent toutes les "interactions analytiques régulières" [8] [11] de composantes holonomes simples (cf. § 8). Les résultats du présent article englobent ainsi les résultats démontrés ou annoncés dans [3] [4] [5] [16] [17]. On pourrait s'en servir pour étudier les singularités d'une classe assez large d'intégrales de classe de Nilsson, englobant comme cas très particulier les intégrales étudiées dans [15] (Chap. VI notamment).

On pourrait aussi s'en servir pour étendre à certains cas de caractéristiques multiples les résultats bien connus sur la propagation des singularités des solutions d'équations aux dérivées partielles à caractéristique simple ; un travail de ce genre est fait dans un article de Melrose et Uhlmann [14], dont nous avons pris connaissance après l'achèvement de [3] [4] [5] ; pour autant que nous le comprenions, cet article donne une version «opérateurs intégraux de Fourier» de nos résultats dans les cas  $r=1$  et  $r=2$  (sans aborder toutefois le problème de la stabilité).

Les cinq premiers paragraphes du présent travail sont purement géométriques.

Le § 1 définit la condition de "non dégénérescence", ainsi que la "variété caractéristique" d'une application réticulée de co-rang 1 (ce sera la variété caractéristique, au sens usuel, du système holonome qu'est le système de Gauss-Manin réticulé). Comme celle de  $\theta_{\underline{X}}^{(\alpha)}$ , cette variété caractéristique est formée de  $2^{r'}$  ( $r' \leq r$ ) composantes lisses, formant une configuration que nous appellerons "r'-cubique régulière" (n°1.0) ( $r' = r - |\sigma_0|$ , où  $\sigma_0$  désigne le plus grand des  $\sigma$  pour lesquels  $F|_{X_\sigma}$  est une submersion).

Le § 2 exhibe toutes les façons de modifier un germe d'application réticulée non dégénérée sans changer sa configuration caractéristique, et construit une "forme réduite" d'un tel germe.

Le § 3 construit un germe d'application réticulée non dégénérée ayant pour configuration caractéristique une configuration  $r$ -cubique régulière donnée à l'avance ; les deux clefs de la construction sont une construction bien connue de Hörmander (qui répond entièrement à la question dans le cas  $r=0$ ) et la notion de « modèle distingué » (n°3.4), dont l'existence pour toutes les valeurs de  $r$  sera établie au §5, à l'aide des Appendices A1 et A2.

Le § 4 montre que les configurations stables sont exactement les configurations caractéristiques des germes d'applications réticulées stables ; dans le cas particulier  $r=0$ , ce résultat n'est qu'une version du résultat connu sur la classification locale des variétés lagrangiennes stables par les déploiements stables de fonctions de la théorie de Thom-Mather [1] [6] [21] ; dans le cas  $r=1$ , on trouve un résultat qui nous avait été suggéré par Nguyễn sĩ Minh, à savoir que les "interactions géométriques stables" de deux variétés lagrangiennes sont classifiées localement par les déploiements stables de fonctions sur une variété 1-réticulée ("variété à bord"), déploiements qui ont été étudiés en détail par Arnold [2].

Le § 5 étudie en détail un cas particulier, celui des « déploiements de fonctions de Morse réticulées », auquel le problème général du § 3 se ramène par transformation de contact ; on y construit un « modèle universel pour les fonctions de Morse réticulées », ce qui permet - grâce à une construction très technique faite dans l'Appendice A2 - d'établir l'existence pour tout  $r$  des « modèles distingués universels » annoncés au n°3.4.

Le § 6 décrit quelques transformations générales auxquelles on peut soumettre les systèmes de Gauss-Manin réticulés : comment on peut les "réduire" à des systèmes de Gauss-Manin d'applications plus simples, comment dans le cas non dégénéré ils sont tous équivalents entre eux (une fois donné  $\alpha$ , ou plus exactement la collection des  $(\alpha_i)_{i \in \mathbb{C} \sigma_0}$ ) à une transformation de contact quantifiée près.

Le § 7 introduit la notion générale de déploiement d'un germe de système microdifférentiel, et montre en s'appuyant sur un théorème général de Nguyễn tú Cường (Appendice C) que le problème de la stabilité des systèmes de Gauss-Manin réticulés  $\mathcal{G}_F^{(\alpha)}$  se réduit, pour un choix générique de  $\alpha$ , au problème géométrique de la stabilité de leur configuration caractéristique, résolu au § 4 ; la condition générique sur  $\alpha$  est  $\alpha_i \neq -\frac{1}{2} \forall i \in \sigma_0$ , et on a des contre-exemples à la stabilité dès que cette condition n'est pas vérifiée.

Enfin le § 8 caractérise microlocalement les systèmes holonomes qui sont des systèmes de Gauss-Manin d'applications réticulées non dégénérées : aux conditions géométriques déjà étudiées dans les premiers paragraphes (avoir pour variété caractéristique une configuration r-cubique régulière), il suffit d'ajouter la condition d'être à caractéristique simple aux points génériques de chaque composante  $V_\sigma$ , et d'être une interaction analytique (au sens de [8]) aux points génériques de chaque  $V_\sigma \cap V_{\sigma'}$ , pour tout couple  $\sigma, \sigma'$  joints par une arête du cube. Grâce aux résultats des premiers paragraphes on peut se ramener au cas où la variété caractéristique est la configuration conormale aux strates d'une variété réticulée, et la démonstration est un exercice d'illustration des résultats généraux de Kashiwara et al. [9] [10] [12] sur les "systèmes holonomes à singularités régulières".

§ 1 - CARACTÉRISTIQUES DES GERMES D'APPLICATIONS NON DÉGÉNÉRÉES

1.0 Configurations r-cubiques régulières

Considérons, dans un germe de variété  $W$  de dimension  $\geq n+r$ , un germe de sous-ensemble  $V$  donné par  $n$  équations

$$(*) \quad u_1 v_1 = \dots = u_r v_r = v_{r+1} = \dots = v_n = 0$$

ou  $u_1, \dots, u_r, v_1, \dots, v_n$  sont des germes de fonctions analytiques à différentielles linéairement indépendantes à l'origine.

$V$  est alors l'union des  $2^r$  composantes lisses  $V_\sigma, \sigma \in \mathcal{P}(I_r)$ , définies par les équations

$$V_\sigma : u_i = 0 \text{ pour } i \in \sigma, v_j = 0 \text{ pour } j \in \{1, 2, \dots, n\} - \sigma$$

Il sera commode d'identifier  $\mathcal{P}(I_r)$  au cube à  $r$  dimensions  $\{0, 1\}^r$

(en identifiant chaque  $\sigma \subset I_r$  à sa fonction caractéristique). Une face du cube est une partie  $\mathcal{Q}$  de  $\mathcal{P}(I_r)$  définie en assignant une valeur fixée (0 ou 1), à un certain nombre de coordonnées du cube (le nombre des coordonnées laissées libres est la dimension de la face).

Explicitement,  $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}(\underline{\sigma}, \bar{\sigma}) = \{\sigma \in \mathcal{P}(I_r) \mid \underline{\sigma} \subset \sigma \subset \bar{\sigma}\}$ .

Toute partie  $P$  du cube est incluse dans une face minimale que nous noterons

$\mathcal{Q}(P)$  :

$$\mathcal{Q}(P) = \mathcal{Q}(\underline{\sigma}, \bar{\sigma}) \text{ avec } \underline{\sigma} = \bigcap_{\sigma \in P} \sigma, \bar{\sigma} = \bigcup_{\sigma \in P} \sigma.$$

(\*\*) On remarque que les  $V_P = \bigcap_{\sigma \in P} V_\sigma$  sont des sous-variétés qui ne dépendent que de  $\mathcal{Q}(P)$ , et de codimension  $n + \dim \mathcal{Q}$ .

La famille de sous-variétés  $(V_{\mathcal{Q}})$  ainsi construite, indexée par l'ensemble des faces du  $r$ -cube, sera appelée configuration r-cubique régulière de codimension  $n$ . On dira que cette configuration est engendrée par les  $V_\sigma, \sigma \in \mathcal{P}(I_r)$ .

L'espace  $V = \bigcup_{\sigma} V_\sigma$  sera appelé support de la configuration.

Il est muni d'une stratification évidente dont les strates sont les

$$\overset{\circ}{V}_{\mathcal{Q}} = V_{\mathcal{Q}} - \bigcup_{\mathcal{Q}' \supset \mathcal{Q}} V_{\mathcal{Q}'}$$

$$V_{\mathcal{Q}}(\underline{\sigma}, \bar{\sigma}) : \begin{cases} u_i = 0 & \text{si } i \in \bar{\sigma}, u_i \neq 0 & \text{sinon} \\ v_j = 0 & \text{si } j \notin \underline{\sigma}, v_j \neq 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Remarquons que la donnée du support de la configuration ne détermine celle-ci que modulo le groupe des rotations et symétries du r-cube.

Remarquons enfin qu'au voisinage d'un point de la strate  $\overset{\circ}{V}_{\mathcal{Q}}$  la configuration est en fait  $(r - \dim \mathcal{Q})$ -cubique régulière.

Cas particulier important :  $r=1$ .

Il s'agit de deux sous-variétés  $V_{\phi}$  et  $V_1$  de codimension  $n$ , se coupant "régulièrement" le long d'une sous-variété de codimension  $n+1$ . Cette situation sera appelée "interaction régulière" de deux sous-variétés. Cette terminologie est inspirée par Kashiwara [8], qui le premier a remarqué l'importance de la notion d'"interaction" (régulière ou non) entre composantes holonomes de systèmes microdifférentiels.

Remarque. La notion de "configuration r-cubique régulière" peut être

caractérisée par la propriété (\*\*), jointe à la propriété de

$$\text{"régularité"} : \forall x \in V_P, T_x V_P = \bigcap_{\sigma \in P} T_x V_{\sigma}.$$

Comme cette affirmation ne nous servira pas explicitement dans la suite, nous laissons sa démonstration à la sagacité du lecteur (il s'agit de montrer que les deux propriétés indiquées impliquent l'existence d'un système d'équations locales (\*), ce qui peut se faire par une double récurrence assez compliquée sur  $(r, n)$ , à l'aide du théorème des fonctions implicites).

1.1 Configuration de l'espace des jets de corang 1  
 (« à la manière de THOM » [20] )

Avec les notations de l'introduction, désignons par  $J(X_\sigma, Y)$ ,

$\sigma \in \mathcal{P}(I_r)$ , le fibré des jets d'ordre 1 de  $X_\sigma$  dans  $Y$  : c'est un fibré de base  $X_\sigma \times Y$ , et pour tout  $\sigma \in \mathcal{P}(I_r)$  l'application tangente à l'inclusion  $i_\sigma : X_\sigma \times Y \hookrightarrow X \times Y$  permet de définir une application canonique de "restriction des jets" :

$$\rho_\sigma : J(X, Y)|_{X_\sigma \times Y} \longrightarrow J(X_\sigma, Y) .$$

Désignons par  $S^\kappa(X_\sigma, Y) \subset J(X_\sigma, Y)$  le sous-ensemble des jets de corang au but exactement égal à  $\kappa$ , et par  $S_\sigma^\kappa \subset J(X, Y)$  son image réciproque par  $\rho_\sigma$  :

$$S_\sigma^\kappa = i_\sigma^{-1}(\rho_\sigma^{-1}(S^\kappa(X_\sigma, Y))) .$$

Désignons enfin par  $J(X, Y)^1$  l'ouvert de  $J(X, Y)$  défini par

$$J(X, Y)^1 = J(X, Y) - \bigcup_{\substack{\kappa \\ \geq 1}} S_\sigma^\kappa \quad (\text{ouvert des jets "de corang } \leq 1 \text{ sur } \underline{X} \text{") .}$$

Proposition. Restreinte à l'ouvert  $J(X, Y)^1$  la famille  $\left\{ S_\sigma^1 \right\}_{\sigma \in \mathcal{P}(I_r)}$

engendre une configuration r-cubique régulière de codimension

$$n = \dim X - \dim Y + 1$$

(on suppose  $n \geq 0$ , et  $r \leq n$ ).

Preuve. Posons  $X = \mathbb{C}^{n+p} \ni (x_1, \dots, x_{n+p})$ ,  $X_i : x_i = 0$  ( $i = 1, 2, \dots, r$ ),

$$Y = \mathbb{C}^{p+1} \ni (y_0, y_1, \dots, y_p) .$$

La fibre de  $J(X, Y)$  est l'ensemble  $L(n+p, p+1)$  des matrices

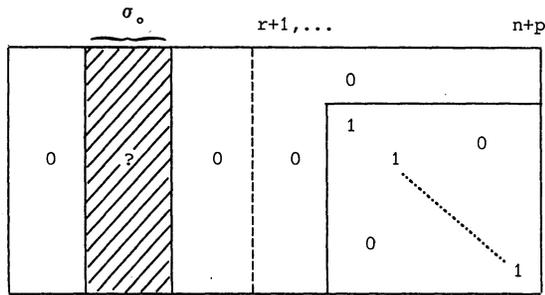
$(\ell_{ij})_{\substack{i=0,1,\dots,p \\ j=1,2,\dots,n+p}}$ , et l'application  $\rho_\sigma$  consiste à oublier

les colonnes d'indice  $j \in \sigma$ . Dire que le point  $(x=0, y=0, \ell_0)$  est dans

$J(X, Y)^1$ , c'est donc dire que la matrice  $\ell_0$  contient un mineur non singulier

d'ordre  $p$  n'ayant que des colonnes d'indices  $j > r$  ; dire que ce point est dans  $S_\sigma^1$ , c'est dire que tous les mineurs d'ordre  $p+1$  ne comportant pas de colonnes d'indice  $j \in \sigma$  sont singuliers.

Soit  $\sigma = \sigma_0$  la plus petite partie de  $I_r$  pour laquelle ceci est vrai. Par un changement linéaire des coordonnées  $x_{r+1}, \dots, x_{n+p}$  d'une part,  $y_0, y_1, \dots, y_p$  d'autre part, on peut ramener la matrice  $\ell_0$  à la forme



Alors pour tout  $\sigma \supset \sigma_0$ ,  $S_\sigma^1$  est donnée localement au voisinage de  $\ell_0$  par les équations

$$S_\sigma^1 : x_j = 0, j \in \sigma ; \delta^{(k)} = 0, k \in \{1, 2, \dots, n\} - \sigma,$$

où  $\delta^{(k)} = \det \ell^{(k)}$ ,  $\ell^{(k)}$  désignant la sous-matrice carrée d'ordre  $p+1$  déduite de  $\ell \in L(n+p, p+1)$  en ne gardant que la  $k$ -ième colonne ainsi que les  $p$  dernières.

$$\text{De plus on a } \frac{\partial}{\partial \ell_{ij}} \delta^{(k)}(\ell_0) = \begin{cases} 1 & \text{si } (i, j) = (0, k) \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Il en résulte que les différentielles en  $\ell_0$  des fonctions  $x_1, \dots, x_r, \delta^{(1)}, \dots, \delta^{(n)}$  sont linéairement indépendantes, de sorte que la famille considérée engendre bien, localement au voisinage de  $\ell_0$ , une configuration  $s$ -cubique régulière ( $s = r - |\sigma_0|$ ) de support

$$\bigcup_{\sigma} S_\sigma^1 = \bigcup_{\sigma \supset \sigma_0} S_\sigma^1 : \begin{cases} x_i \delta^{(i)} = 0 & \text{pour } i \in I_r - \sigma_0 \\ x_j = 0 & \text{pour } j \in \sigma_0 \\ \delta^{(k)} = 0 & \text{pour } k = r+1, \dots, n \end{cases}$$

1.2 Germes d'applications non dégénérées

Soit  $\underline{X}$  un germe de variétés  $r$ -réticulées, et  $F : X \rightarrow Y$  un germe d'application analytique sur  $X = X_\phi$  (on suppose  $\dim X \geq \dim Y + r - 1$ ). La collection des applications  $(F_\sigma = F|_{X_\sigma})_{\sigma \in \mathcal{P}(I_r)}$  sera notée  $\underline{F} : \underline{X} \rightarrow Y$  et appelée germe d'application  $r$ -réticulée. Son ensemble critique

$\Sigma(\underline{F})$  est par définition l'union dans  $X$  des sous-ensembles

$$\Sigma(F_\sigma) = \left\{ x \in X_\sigma \mid \text{rg } T_x F_\sigma < \dim Y \right\}.$$

On dira que  $\underline{F}$  est de corang 1 si l'application tangente à chacune des  $F_\sigma$  est de corang au but  $\leq 1$ , autrement dit si pour tout  $\sigma$  le noyau de l'application cotangente à  $F_\sigma$  en tout point de  $\Sigma(F_\sigma)$  est de dimension exactement égale à 1. Remarquons que pour tout  $x \in \Sigma(\underline{F})$  il existe un  $\sigma_x \in \mathcal{P}(I_r)$  tel que  $x \in \Sigma(F_\sigma) \Leftrightarrow \sigma \supset \sigma_x$ , et que les noyaux des applications cotangentes aux  $F_\sigma$  sont ordonnés par inclusion. Il en résulte dans le cas du corang 1 que l'espace vectoriel à une dimension  $\text{Ker } T_x^* F_\sigma$  ne dépend pas de  $\sigma \supset \sigma_x$ , ce qui permet de définir une application

$$\chi_{\underline{F}} : \Sigma(\underline{F}) \longrightarrow P^*Y$$

de l'ensemble critique dans le fibré projectif cotangent à  $Y$  (à tout point critique on associe la direction du noyau de l'application cotangente).

Cette application sera appelée application caractéristique de  $\underline{F}$ .

Définition :  $\underline{F}$  est dite non dégénérée si elle est de corang 1, et si

la section  $j(\underline{F}) : X \longrightarrow J(X, Y)$  du fibré des jets définie par  $F$  est transverse à la stratification  $r$ -cubique régulière définie au n° 1.1.

Proposition. Si  $\underline{F}$  est non dégénérée, alors l'ensemble critique  $\Sigma(\underline{F})$

est le support d'une configuration  $(r - |\sigma_o|)$ -cubique régulière de codimension  $n = \dim X - \dim Y + 1$ .