MÉMOIRES DE LA S. M. F.

GEORGES DLOUSSKY

Structure des surfaces de Kato

Mémoires de la S. M. F. 2^e série, tome 14 (1984)

<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1984_2_14__R1_0>

© Mémoires de la S. M. F., 1984, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mémoires de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Memoires/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

STRUCTURE DES SURFACES DE KATO

DLOUSSKY Georges

On étudie certaines surfaces de la classe VII_0 de K. KODAIRA, construites par Ma. KATO.

Dans la première partie, on attache à toute surface de KATO des invariants de natures diverses : des germes d'endomorphisme de surfaces, un nombre complexe "la trace", une famille d'entiers "la famille des opposés des self-intersections des courbes rationnelles du revêtement universel", et on donne certaines de leurs propriétés.

Dans la seconde partie, on étudie les surfaces de Kato "de trace non nulle" au moyen des germes d'application associés. On introduit la courbe formelle et les champs de vecteurs formels invariants par ces germes, et on constate sur des exemples que ces objets ne sont pas convergents en général. On étudie enfin les courbes de ces surfaces en décrivant toutes les matrices d'intersection et on montre que lorsque "la trace" est nulle, la matrice est définie négative.

Some surfaces of the VII_0 th class of KODAIRA, constructed by Ma. KATO are studied.

In the first part, different kinds of invariants are attached to KATO's surfaces : germs of mappings between surfaces, a complex number "the trace", a family of integers "the family of the opposite of self-intersections of rational curves of the universal covering space", and some properties are given.

In the second part, KATO's surfaces with "non vanishing trace" are studied by mean of germs of mappings. A formal curve and formal vector fields invariant by these germs are introduced and it can be checked on examples that these objects are not convergent in general. All intersection matrices of rational curves are described and it is shown that when "trace" vanishes the matrix is negative definite.

Introduction	1
Invariants associés	3
Surfaces de trace non nulle et courbes	53
Bibliographie	119

INTRODUCTION

La classification des surfaces analytiques complexes compactes due à K. KODAIRA [13][14] est incomplète pour les surfaces S pour lesquelles le premier nombre de Betti $b_1(S)$ vérifie $b_1(S) = 1$ (c'est la classe VII dans la terminologie de Kodaira) et dont les seules fonctions méromorphes sont les constantes.

Dans [1] BOGOMOLOV affirme que lorsque le deuxième nombre de Betti $b_2(S)$ vérifie $b_2(S) = 0$, les seules surfaces vérifiant cette propriété sont les surfaces de Hopf non elliptiques et certaines surfaces d'Inoue [9].

Reste le cas $b_2(S) > 0$: M. INOUE a construit deux types d'exemples [10][11] et M. KATO [12] a démontré que ces surfaces contenaient une coquille sphérique globale (C.S.G.). On n'a actuellement aucun exemple de surface pour laquelle $b_2(S) > 0$ ne contenant pas de C.S.G.

L'objet de ce travail est l'étude des surfaces contenant une C.S.G. On montre en reprenant une idée de M. Kato qu'on peut associer à ces surfaces des germes d'applications contractantes $F : (\mathbb{C}^2, 0) \rightarrow (\mathbb{C}^2, 0)$ qui permettent de reconstituer la surface. L'étude de ces germes permet une étude "fine" de ces surfaces, et en traduisant les problèmes géométriques en terme de germes d'application, on a un outil parfaitement adapté, qu'on se propose de développer.

Dans la première partie, on définit des invariants associés aux surfaces contenant une C.S.G. et on étudie toutes les configurations possibles des courbes de revêtement universel. Dans la seconde partie, on donne un début de classement du cas générique (i.e. $\text{tr}(S) \neq 0$) et on étudie les matrices d'intersection des courbes de S .

Tous les résultats ont été annoncés dans deux notes [2][3]. Je remercie I. NAKAMURA de m'avoir signalé une erreur : dans le thm 2 [3] il faut garder l'hypothèse $\text{tr}(S) \neq 0$.

La classification des surfaces lorsque $b_2(S) = 1$ annoncée dans [2] a été trouvée indépendamment et par d'autres méthodes par I. NAKAMURA [17]. En outre :

1) I. ENOKI [5] a classé les surfaces pour lesquelles $b_1(S) = 1$, $b_2(S) > 0$ pour

G. DLOUSSKY

lesquelles il existe un diviseur $D \neq 0$ pour lequel $D^2 = 0$: c'est exactement le cas $\text{tr}(S) \neq 0$ (ou $\sigma_n(S) = 2n$) ; 2) I. NAKAMURA [16][17] a caractérisé les surfaces d'Inoue S_ω et $\tilde{S}_\omega$ [11] par l'existence de respectivement 2 ou 1 cycle de courbes rationnelles et sans supposer l'existence d'une C.S.G.

Je remercie André HIRSCHOWITZ pour son aide au cours de ce travail.

*
* *

STRUCTURE DES SURFACES DE KATO I
INVARIANTS ASSOCIES

§ 0 - Introduction.

§ 1 - Surfaces contenant une coquille sphérique globale.

1.2 Données de Kato et surfaces $S(\Pi, \sigma)$ associées.

1.6 Une caractérisation des surfaces contenant une C.S.G.

1.9 Revêtement universel des surfaces $S(\Pi, \sigma)$.

1.12 Bouts du revêtement universel d'une surface contenant une C.S.G.

§ 2 - Surfaces minimales contenant une C.S.G.

2.1 Introduction.

2.4 Contraction des courbes exceptionnelles.

2.9 Données de Kato minimales.

§ 3 - Surfaces de Kato.

3.2 Effondrement du revêtement universel sur une courbe.

3.11 Germes d'applications associés à une surface de Kato.

3.19 Configuration des courbes compactes du revêtement universel.

3.35 Formes différentielles et champs de vecteurs globaux.

3.37 Invariants cohomologiques.

Références.

Notations

Pour $z = (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2$ et $\varepsilon > 0$ assez petit, on note :

$$\|z\| = (|z_1|^2 + |z_2|^2)^{1/2}$$

$$B_\varepsilon := \{z \in \mathbb{C}^2 \mid \|z\| < 1 + \varepsilon\} \quad , \quad B_{-\varepsilon} := \{z \in \mathbb{C}^2 \mid \|z\| < 1 - \varepsilon\} \quad , \quad B := B_0$$

$$\Sigma_\varepsilon := \{z \in \mathbb{C}^2 \mid 1 - \varepsilon < \|z\| < 1 + \varepsilon\}$$

$$\Sigma_\varepsilon^+ := \{z \in \mathbb{C}^2 \mid 1 < \|z\| < 1 + \varepsilon\} \quad , \quad \Sigma_\varepsilon^- := \{z \in \mathbb{C}^2 \mid 1 - \varepsilon < \|z\| < 1\}$$

$$\Sigma := \{z \in \mathbb{C}^2 \mid \|z\| = 1\} \quad .$$

On appellera : surface une variété analytique complexe de dimension 2 ,
courbe un espace analytique irréductible de dimension 1 .

§ 0.- Introduction.

0.1 - La classification des surfaces complexes compactes minimales due à K. KODAIRA est incomplète en ce qui concerne les surfaces de la classe VII_0 pour lesquelles les nombres de Betti $b_1(S)$ et $b_2(S)$ vérifient :

$$b_1(S) = 1 \quad \text{et} \quad b_2(S) \geq 1 .$$

Ma. INOUE en a exhibé des exemples dans [10] et [11] et Ma. KATO a montré que les surfaces S_α [10] et S_ω [11] contiennent une "coquille sphérique globale".

L'objet de cet article est l'étude des surfaces compactes contenant une "coquille sphérique globale".

0.2 - Définition : Soit S une surface compacte et

$$f : (\mathbb{C}^2, \Sigma) \rightarrow S$$

un germe d'isomorphisme. On dit que f est une coquille sphérique globale - ce qu'on abrégera C.S.G. - si $S \setminus f(\Sigma)$ est connexe.

Le point de départ est une observation due à Ma. KATO [12]: toutes les surfaces compactes contenant une C.S.G. sont isomorphes à une surface $S(\Pi, \sigma)$ (Proposition 1.7) , qui est obtenue de la façon suivante :

Définition : Soit $\Pi : B^\Pi \rightarrow B$ une succession finie d'éclatements au-dessus d'un nombre fini de points de la boule unité B de $\mathbb{C}^2$ et

$$\sigma : \bar{B} \rightarrow B^\Pi$$

une application biholomorphe sur son image. En recollant holomorphiquement par $\sigma\Pi$ des voisinages isomorphes des deux bords de $B^\Pi \setminus \sigma(\bar{B})$, on obtient une surface compacte, notée $S(\Pi, \sigma)$ qui est canoniquement munie d'une C.S.G.

Dans le cas où $S(\Pi, \sigma)$ est minimale on montre (théorème 2.13) que Π et σ peuvent être choisis de sorte que :

- les éclatements composant Π aient lieu au-dessus de 0 ,
- $\bar{\Pi}^{-1}(0)$ ne contiennent qu'une seule courbe exceptionnelle de première espèce Γ .
- $\sigma(0)$ appartient à Γ .

0.3 - Définition : On appellera surface de Kato une surface compacte minimale contenant une C.S.G. et pour laquelle $b_2(S) \geq 1$.

A une surface de Kato S on associe une famille de germes d'applications $\{F_C\}_{C \in \mathfrak{C}(\tilde{S})}$ indexée par l'ensemble $\mathfrak{C}(\tilde{S})$ des courbes rationnelles du revêtement universel $\tilde{S}$ de S . Ces germes sont isomorphes à des germes de la forme

STRUCTURE DES SURFACES DE KATO

$F = \mathbb{P}^1$ et à chacun d'eux on peut associer une surface isomorphe à S (Proposition 3.16), ce qui permet de montrer (§ 3.11) que la recherche des classes d'isomorphisme des surfaces de Kato est équivalente à celle des classes d'isomorphisme des germes de la forme $F = \mathbb{P}^1$.

L'invariant analytique $\{F_C\}_{C \in \mathfrak{C}(\tilde{S})}$ étant d'un emploi malaisé, on introduit d'autres invariants associés à S plus grossiers :

- 1) $b_2(S)$ qui correspond au nombre d'éclatements qui composent chaque germe F_C ;
- 2) la famille des self-intersections des courbes rationnelles du revêtement universel $\tilde{S}$ de S noté $a(S) := (C_i \cdot C_i)_{i \in \mathfrak{C}(\tilde{S})}$:

On montre que $\mathfrak{C}(\tilde{S})$ est principal homogène sous $\mathbb{Z}$ (Corollaire 3.7) et on décrit toutes les configurations possibles des courbes compactes de $\tilde{S}$ (Théorème 3.27) ;

- 3) la trace de S , notée $tr(S)$ et définie pour tout germe $F = \mathbb{P}^1$ associée à S par

$$tr(S) := tr DF(0)$$

On montre que $tr(S)$ ne dépend pas du choix de F et on a :

Théorème : Soit S une surface de Kato. Alors :

- i) $0 \leq |tr(S)| < 1$
- ii) $tr(S) \neq 0$ si et seulement si $C_i \cdot C_i = -2$ pour tout $i \in \mathfrak{C}(\tilde{S})$.

Les invariants analytiques $a(S)$ et $tr(S)$ déterminent le graphe des éclatements de tout germe $F = \mathbb{P}^1$ associés à S .

0.4 - On montrera dans un travail ultérieur que, dans certains cas, notamment lorsque $b_2(S) = 1$ les invariants $b_2(S)$, $a(S)$ et $tr(S)$ permettent de reconstituer $\{F_C\}_{C \in \mathfrak{C}(\tilde{S})}$ et donc la surface S . On en déduira dans ces cas la classification des surfaces de Kato, leur déformation semi-universelle et leur groupe d'automorphismes.

Je remercie André HIRSCHOWITZ pour toute l'aide apportée au cours de ce travail.

§ 1 . Surfaces contenant une coquille sphérique globale.

Définition 1.1 [12]

Soit S une surface analytique complexe compacte, U un voisinage ouvert de la sphère unité Σ dans $\mathbb{C}^2$ et

$$f : U \rightarrow S$$

une application analytique biholomorphe sur son image. On appellera le germe d'application

$$f : (\mathbb{C}^2, \Sigma) \rightarrow S$$

une coquille sphérique de S , et on dira que f est une coquille sphérique globale - ce qu'on abrégera par C.S.G. - si

$$S \setminus f(\Sigma)$$

est connexe.

Les surface de Hopf primaires contiennent des C.S.G. ; par exemple si

$\theta : \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ est l'homothétie de rapport $\alpha \in \mathbb{C}$ avec $|\alpha| < 1$, G est le groupe d'automorphismes de $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ engendré par θ et

$\Pi : \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} \rightarrow S := \mathbb{C}^2 \setminus \{0\} / G$ est l'application canonique, alors

$$f : (\mathbb{C}^2, \Sigma) \rightarrow S$$

induit par Π est une C.S.G. de la surface de Hopf S .

1.2 Données de Kato et surfaces $S(\Pi, \sigma)$ associées.

Définition 1.3

Soit

$$\Pi : W \rightarrow \mathbb{C}^2$$

une succession finie d'éclatements au-dessus d'un nombre fini de points de la boule unité B de $\mathbb{C}^2$ et

$$\sigma : \bar{B} \rightarrow B^\Pi := \Pi^{-1}(B)$$

une application analytique définie sur un voisinage ouvert de $\bar{B}$ et biholomorphe sur son image dans B^Π .

On appellera (Π, σ) une donnée de Kato, et on dira qu'elle est centrée si 0 est un point fixe de $F := \Pi \sigma$, c'est-à-dire

$$F(0) = \Pi \sigma(0) = 0.$$

Dans [12] Ma. Kato donne un procédé de construction de surfaces contenant une C.S.G. :

Notons pour $\varepsilon > 0$ petit

$$B_\varepsilon^\Pi := \Pi^{-1}(B_\varepsilon).$$

L'application

$$\sigma^\Pi : B_\varepsilon^\Pi \rightarrow B_\varepsilon^\Pi$$

envoie biholomorphiquement un voisinage du bord ∂B^Π de B^Π dans B_ε^Π , sur un

STRUCTURE DES SURFACES DE KATO .

voisinage du bord $\partial(\sigma(B))$ de $\sigma(B)$; en recollant par $\sigma\Pi$ ces voisinages isomorphes, on obtient une surface analytique complexe compacte notée

$$S(\Pi, \sigma) .$$

$S(\Pi, \sigma)$ est canoniquement munie d'un plongement ouvert

$$i : A_0 = \text{Ann}(\Pi, \sigma) := B^\Pi \setminus \sigma(B) \rightarrow S(\Pi, \sigma)$$

de plus, pour $\varepsilon > 0$ assez petit pour que sur $\Sigma_\varepsilon, \Pi^{-1}$ existe, les applications

$$\begin{aligned} f^+ : \Sigma_\varepsilon^+ &\rightarrow S(\Pi, \sigma) \\ z &\rightarrow i\sigma(z) \\ f^- : \Sigma_\varepsilon^- &\rightarrow S(\Pi, \sigma) \\ z &\rightarrow i\Pi^{-1}(z) \end{aligned}$$

se recollent par construction sur Σ pour donner une C.S.G.

$$f = f(\Pi, \sigma) : (\mathbb{C}^2, \Sigma) \rightarrow S(\Pi, \sigma) .$$

Définition 1.4.

On dira que $S(\Pi, \sigma)$ (resp. $\text{Ann}(\Pi, \sigma)$, $f(\Pi, \sigma)$) est la surface (resp. l'anneau, la C.S.G.) associée à la donnée de Kato (Π, σ) .

Dans la suite $\text{Ann}(\Pi, \sigma)$ sera identifié à son image par i .

On va maintenant construire à partir d'une donnée de Kato quelconque (Π, σ) une donnée de Kato centrée (Π', σ') de sorte que $S(\Pi, \sigma)$ et $S(\Pi', \sigma')$ soient isomorphes. Plus précisément on a :

Lemme 1.5. : Soit (Π, σ) une donnée de Kato et $F = \Pi\sigma$.

Alors : Il existe une donnée de Kato centrée (Π', σ') , un automorphisme de la boule φ et un isomorphisme

$$\Psi : S(\Pi', \sigma') \rightarrow S(\Pi, \sigma)$$

pour lesquels le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{C}^2, \Sigma) & \xrightarrow{\varphi} & (\mathbb{C}^2, \Sigma) \\ f(\Pi', \sigma') \downarrow & & \downarrow f(\Pi, \sigma) \\ S(\Pi', \sigma') & \xrightarrow{\Psi} & S(\Pi, \sigma) \end{array}$$

soit commutatif.

De plus, si $F' := \Pi'\sigma'$ on a :

$$F = \varphi F' \varphi^{-1}$$

□ Démonstration :

D'après le théorème du point fixe de Brouwer, F admet un point fixe $z_0 \in B$; d'autre part les automorphismes de la boule opèrent transitivement et se prolongent analytiquement à un voisinage de $\bar{B}$ [21] . Soit alors un automorphisme