MÉMOIRES DE LA S. M. F.

CORINNE BLONDEL

**Les représentations supercuspidales des groupes
méta-plectiques sur $GL(2)$ et leurs caractères**

Mémoires de la S. M. F. 2^e série, tome 18 (1985)

http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1985_2_18__1_0

© Mémoires de la S. M. F., 1985, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mémoires de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Memoires/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

INTRODUCTION

L'origine de ce travail remonte à 1979 : Y. Flicker venait de prouver (par des moyens globaux) l'existence d'une correspondance biunivoque entre les classes de représentations admissibles irréductibles spécifiques du groupe métaplectique $\tilde{G}$ d'ordre n sur $GL_2(F)$ (1) et certaines classes de représentations admissibles irréductibles de $GL_2(F)$, lorsque F est de caractéristique 0. P. Gérardin, qui avait calculé avec P. Kutzko les facteurs locaux des représentations supercuspidales irréductibles de $GL_2(F)$ en utilisant leur construction explicite par induction à partir de sous-groupes ouverts et compacts modulo le centre ($[K1]$, $[GK]$), fut alors convaincu de la possibilité d'obtenir cette correspondance locale par des moyens purement locaux, et de façon très explicite : le cas des représentations non supercuspidales de $\tilde{G}$ étant décrit explicitement par Y. Flicker, il fallait étudier les représentations supercuspidales de $\tilde{G}$, avec l'espoir que leur construction par des méthodes analogues à celles de $[K1]$ et $[GK]$ permit d'obtenir la correspondance et de la décrire entièrement. Il me demanda de travailler cette question, et les résultats escomptés sont maintenant établis, pour tout corps F localement compact non archimédien de caractéristique ou caractéristique résiduelle première à n . J'ai montré dans $[B]$ que des constructions voisines de celles effectuées pour $GL_2(F)$ donnaient naissance à des représentations supercuspidales irréductibles spécifiques de $\tilde{G}$, et que toutes (à isomorphisme près) étaient obtenues par ces constructions. L'objet de cet article est d'utiliser ces constructions (que l'on rappellera) pour prouver le résultat suivant :

.....

- (1) Soit F un corps local non archimédien, et n un entier strictement positif tel que le groupe $\mu_n(F)$ des racines n -ièmes de l'unité dans F^* ait pour cardinal n . Le groupe métaplectique d'ordre n sur $G = GL_2(F)$ est l'extension centrale topologique $\tilde{G}$ de G par $\mu_n(F)$ construite par T. Kubota ($[K2]$). Ses représentations spécifiques sont celles dans lesquelles le noyau $\mu_n(F)$ de l'extension opère par un caractère injectif i donné.

Théorème :

Il existe une unique application $\tilde{T} \longrightarrow T$ de l'ensemble des classes d'équivalence de représentations supercuspidales irréductibles spécifiques de $\tilde{G}$ dans l'ensemble des classes d'équivalence de représentations irréductibles admissibles de G , vérifiant :

$$(*) \quad \Delta(g^n) \Theta_{\tilde{T}}(g^n, s(g^n)^{-1}) = \sum_{\substack{h \\ h^n = g^n}} \Delta(h) \Theta_T(h) \quad (2)$$

pour tout élément régulier g de G tel que g^n soit régulier.

Cette application est une injection dont l'image est constituée des classes de représentations irréductibles supercuspidales de G de caractère central trivial sur $\mu_n(F)$ et, si n est pair, des classes de représentations spéciales de G associées aux caractères de F^* non triviaux sur $\mu_n(F)$ dont le carré est trivial sur $\mu_n(F)$.

Dans le I, on rappellera la construction du groupe métaplectique d'ordre n sur $GL_2(F)$ (I.1) et ses propriétés essentielles (I.2). On donnera en I.3 la description de l'action des éléments réguliers de G sur l'arbre de $GL_2(F)$, qui sera beaucoup utilisée dans la suite. On rappellera en I.4 quelques définitions et résultats classiques sur les représentations supercuspidales et induites.

Le II est consacré à la construction des représentations supercuspidales irréductibles de $\tilde{G}$: après avoir défini en II.1 les sous-groupes compacts utilisés, on donnera en II.2 la construction des représentations de la série ramifiée, en II.3 celle des représentations de la série non ramifiée, puis on rappellera en II.4 que ces constructions sont exhaustives.

Le III est consacré à la démonstration du théorème ci-dessus. On montrera en III.1 que le caractère d'une représentation admissible spécifique de $\tilde{G}$ est nul en tout élément régulier qui n'est pas, à une racine n -ième de l'unité près, puissance- n -ième d'un élément régulier (les éléments réguliers de $\tilde{G}$ étant ceux dont la projection sur G est un élément régulier de G), résultat qui explique l'injecti-

.....

(2) On désigne par $\Theta_{\tilde{T}}$ (resp. Θ_T) le caractère de $\tilde{T}$ (resp. T) ; c'est une fonction localement intégrable (cf III.2).

La section $g \longmapsto (g, s(g)^{-1})$ est définie en I.1.

On pose $\Delta(h) = \left| \frac{(a-b)^2}{ab} \right|_F^{\frac{1}{2}}$ si a et b sont les valeurs propres de h dans F ou dans une extension de F .

INTRODUCTION

vité de la relation (*). On expliquera en III.2 comment les arguments de Jacquet-Langlands ([JL] chapitre 7) se généralisent au groupe métaplectique et montrent que les caractères des représentations supercuspidales irréductibles spécifiques de $\tilde{G}$ sont des fonctions localement intégrables, localement constantes sur les éléments réguliers ; puis on énoncera le théorème ci-dessus, assorti de quelques remarques. Pour démontrer ce théorème, on choisira dans chaque classe d'équivalence de représentations supercuspidales irréductibles spécifiques de $\tilde{G}$ une représentation obtenue par les constructions de II et on lui associera une représentation de G obtenue par les constructions de [GK], ou bien spéciale, de sorte que la relation (*) soit vérifiée. La démonstration reposera donc essentiellement sur la comparaison des caractères de représentations induites $T = \text{Ind}_H^G \pi$ et $\tilde{T} = \text{Ind}_H^{\tilde{G}} \tilde{\pi}$ (où H est un sous-groupe ouvert, compact modulo le centre, de G) ; c'est pourquoi nous établirons en III.3 des formules donnant de façon aussi semblable que possible le caractère de $\tilde{T}$ ou T en fonction de celui de $\tilde{\pi}$ ou π : pour les éléments elliptiques, ce sont les formules de caractère induit classiques ; pour les éléments hyperboliques, en revanche, on obtiendra des formules compliquées mais se prêtant très bien à une comparaison terme à terme, le but recherché. Ces formules redémontrant au passage l'existence d'une fonction localement constante donnant le caractère de $\tilde{T}$ ou T sur l'ouvert des éléments réguliers, le résultat d'intégrabilité locale de III.2 ne sera utilisé que pour montrer que l'application $\tilde{T} \longrightarrow T$ obtenue définit une injection par passage aux classes d'équivalence de représentations. On utilisera les formules obtenues en III.4 pour montrer qu'à toute représentation irréductible supercuspidale spécifique de la série ramifiée de $\tilde{G}$ correspond une représentation irréductible supercuspidale de la série ramifiée de G , puis en III.5 pour montrer qu'à toute représentation irréductible supercuspidale spécifique de la série non ramifiée de $\tilde{G}$ correspond une représentation irréductible supercuspidale de la série non ramifiée, ou bien une représentation spéciale, de G . Les calculs permettant d'aboutir à la formule (*) sont parfois longs ; ils sont détaillés en III.4, ne le sont plus en III.5. On verra que les représentations spéciales de G obtenues (si n est pair) correspondent à des représentations non ramifiées de $\tilde{G}$ construites à partir de caractères "exceptionnels" d'une extension non ramifiée E^* de F : ce sont des caractères de conducteur relatif 1 dont la puissance n -ième est le composé d'un caractère de F^* avec la norme de E^* sur F^* . Si $n=2$, on obtient ainsi (III.5) une nouvelle construction des représentations de Weil impaires.

Les résultats de II et III permettent de préciser le théorème ci-dessus, d'une part par les théorèmes III.4.1 et III.5.1 qui décrivent explicitement la correspondance, d'autre part par quelques remarques :

C. BLONDEL

- si l'on normalise les mesures de Haar sur $\widetilde{G}/F^{*n}$ et G/F^* de sorte que $\widetilde{F^*K}/F^{*n}$ et F^*K/F^* aient même volume, et si $\widetilde{T}$ correspond à T (par (*)), alors leurs degrés formels $d(\widetilde{T})$ et $d(T)$ vérifient $d(\widetilde{T}) = n d(T)$.

Cela résulte des théorèmes III.4.1 et III.5.1 : les degrés formels des représentations considérées sont donnés en II (2.4, 2.7, 3.4 et 3.7 ; le degré formel d'une représentation spéciale de $GL_2(F)$ est $\frac{1}{2}(q-1)$ si la mesure de Haar sur G/F^* donne à F^*K/F^* le volume 1).

- le caractère d'une représentation irréductible supercuspidale spécifique $\widetilde{T}$ de $\widetilde{G}$ est constant au voisinage de 1 sur l'ouvert des éléments elliptiques réguliers de $\widetilde{G}$.

C'est en effet le cas pour le caractère d'une représentation irréductible admissible de carré intégrable de G (cf [H] et [JL]). Or si $\widetilde{T}$ correspond à T , la relation (*) devient, pour g elliptique régulier voisin de 1 et g^n régulier :

$$\Theta_{\widetilde{T}}(g^n) = n \Theta_T(g).$$

- les résultats de P. Kutzko ([Ko2]) sur les caractères des représentations supercuspidales de $GL_2(F)$ permettront de dresser une table complète des caractères des représentations supercuspidales spécifiques de $GL_2(F)$.

Je ne puis terminer sans remercier P. Gérardin, qui fut l'instigateur de ce travail et me conseilla tout au long de sa réalisation, et F. Rodier, dont l'aide patiente et les encouragements me permirent de mener cette étude à son terme. De nombreuses conversations avec P. Barrat, H. Carayol et tous les participants du séminaire sur les groupes réductifs et les formes automorphes de l'Université Paris VII, m'ont aussi beaucoup aidée. Je remercie enfin P.J. Sally et P. Kutzko de l'intérêt bienveillant qu'ils ont manifesté pour mon travail durant l'été 1983 à l'Université de Chicago.

TABLE DES MATIÈRES

I. LES PROPRIÉTÉS FONDAMENTALES

I.1. Le groupe métaplectique d'ordre n sur $GL_2(F)$	p. 7
I.2. Propriétés du groupe métaplectique	p. 11
I.3. L'arbre de $GL_2(F)$	p. 16
I.4. Les représentations supercuspidales de $\widetilde{G}$	p. 24

II. CONSTRUCTION DES REPRÉSENTATIONS SUPERCUSPIDALES DE $\widetilde{G}$

II.1. Sous-groupes remarquables du compact maximal standard	p. 27
II.2. Construction de la série ramifiée	p. 31
II.3. Construction de la série non ramifiée	p. 37
II.4. Les représentations supercuspidales du groupe métaplectique	p. 46

III. LA CORRESPONDANCE LOCALE

III.1. Les distributions spécifiques sur le groupe métaplectique	p. 49
III.2. Quelques remarques sur la formule de correspondance	p. 51
III.3. Caractère des représentations supercuspidales de $GL_2(F)$ et $\widetilde{GL_2(F)}$.	p. 56
III.4. La correspondance : série ramifiée	p. 76
III.5. La correspondance : série non ramifiée	p. 96

Notations:

n : entier strictement positif.

F : corps local non archimédien, de caractéristique résiduelle première à n .

$\mathcal{O}$: anneau des entiers de F .

$\mathfrak{f}$: idéal maximal de $\mathcal{O}$.

k : corps résiduel de F , i.e. $\mathcal{O}/\mathfrak{f}$.

p : caractéristique de k .

q : cardinal de k .

ϖ : une uniformisante de F .

E : extension quadratique séparable de F , d'anneau des entiers $\mathcal{O}_E$ ayant pour idéal maximal $\mathfrak{f}_E$, de corps résiduel k_E .

N : la norme de E^* dans F^* , de noyau $\text{Ker } N$.

Tr : la trace de E sur F , de noyau $\text{Ker } \text{Tr}$.

Les notions de conducteur d'un caractère de F , F^* , E , E^* , et de conducteur relatif (par rapport à F) d'un caractère de E^* sont définies en [GK], ainsi que celle de caractère régulier de E^* . Ici, caractère signifie homomorphisme continu dans $\mathbb{C}^*$.

I. LES PROPRIÉTÉS FONDAMENTALES.

I.1. LE GROUPE MÉTAPLECTIQUE D'ORDRE n SUR $GL_2(F)$.

a) Les revêtements de $SL_2(F)$.

Soit G et C deux groupes topologiques localement compacts séparables, le groupe C étant commutatif. On appelle extension centrale de G par C la donnée d'une suite exacte de groupes : $1 \rightarrow C \xrightarrow{i} E \xrightarrow{p} G \rightarrow 1$, telle que $i(C)$ soit contenu dans le centre de E . L'extension centrale est dite topologique si i est un homéomorphisme de C sur un sous-groupe fermé de E , et si p induit un isomorphisme de groupes topologiques de $E/i(C)$ sur G . Deux extensions centrales E et E' de G par C et C' respectivement sont isomorphes s'il existe un isomorphisme de groupes $\psi : E \rightarrow E'$ tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$\begin{array}{ccccccc}
 1 & \longrightarrow & C & \xrightarrow{i} & E & \xrightarrow{p} & G \longrightarrow 1 \\
 & & \downarrow & & \downarrow \psi & & \downarrow \text{Id} \\
 1 & \longrightarrow & C' & \xrightarrow{i'} & E' & \xrightarrow{p'} & G \longrightarrow 1
 \end{array} \quad (*)$$

Dans le cas d'extensions centrales topologiques, on demande que ψ soit un homéomorphisme. Une extension centrale topologique E de G par C est un revêtement de G si le sous-groupe des commutateurs de E est dense dans E (C. Moore [Mo]). Un revêtement E de G de noyau C est dit universel si pour toute extension centrale topologique $1 \rightarrow C' \xrightarrow{i'} E' \xrightarrow{p'} G \rightarrow 1$, il existe un unique homomorphisme $\psi : E \rightarrow E'$ rendant le diagramme (*) commutatif. Si le groupe G possède un revêtement universel (ce qui suppose en particulier que le sous-groupe des commutateurs de G soit dense dans G), celui-ci est unique à isomorphisme unique près.

Soit G un groupe simple simplement connexe (comme groupe algébrique) déployé défini sur un corps topologique infini k . R. Steinberg [St], C. Moore [Mo], puis H. Matsumoto [Mat] ont étudié les extensions centrales du groupe $G(k)$ des points de G sur le corps k . En utilisant la décomposition de Bruhat de G pour définir des sections particulières de ces extensions, ils ont ramené leur détermination à celle de certains cocycles sur k^* . Nous voulons rappeler ici ces résultats dans le cas du groupe $SL_2(F)$, où F est local non archimédien, sous la forme donnée par H. Matsumoto.

Définition 1.1 :

On appelle cocycle de Steinberg bilinéaire sur F^* à valeurs dans C , groupe commutatif localement compact séparable, toute application λ de $F^* \times F^*$ dans C vérifiant les propriétés suivantes, pour $x, y, z \in F^*$:

$$\begin{aligned}
 (H_1) \quad & \lambda(xy, z) = \lambda(x, z) \lambda(y, z) \\
 (H_2) \quad & \lambda(x, yz) = \lambda(x, y) \lambda(x, z) \\
 (H_3) \quad & \lambda(x, 1-x) = 1 \text{ si } x \neq 1.
 \end{aligned}$$

Un cocycle de Steinberg λ sur F^* à valeurs dans C est topologique s'il vérifie de plus :

(H₄) L'application $(x,y) \mapsto \lambda(x,y)$ est continue sur $F^* \times F^*$ et, quand on convient que $\lambda(1,0) = \lambda(0,1) = 1$, l'application $(x,y) \mapsto \lambda(x,1-xy)$, définie sur un voisinage de l'origine dans $F \times F$, est continue à l'origine.

Proposition 1.2 ([Mat] corollaire 5.12) :

Le groupe des cocycles de Steinberg bilinéaires sur F^* à valeurs dans C est isomorphe au groupe $H^2(SL_2(F), C)$ des classes d'isomorphismes d'extensions centrales de $SL_2(F)$ par C , par l'application qui associe au cocycle de Steinberg λ , la classe d'extensions correspondant au cocycle suivant sur $SL_2(F)$:

$$\alpha_\lambda(g, g') = \lambda(\chi(g), \chi(g')) \lambda(\chi(gg'), \frac{-\chi(g')}{\chi(g)})^{-1},$$

$$\text{où } \chi(g) = \begin{cases} c & \text{si } c \neq 0 \\ d & \text{sinon} \end{cases} \text{ pour } g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(F).$$

Une extension centrale de cocycle α_λ est topologique si et seulement si le cocycle de Steinberg λ l'est.

Il reste à décrire les cocycles de Steinberg bilinéaires sur F^* . Certains d'entre eux jouent un rôle fondamental : les symboles de Hilbert. Soit $\mu(F)$ le groupe des racines de l'unité contenues dans F , et m son ordre. Pour tout diviseur n de m , on définit (voir [Mi] ou [S2]) le symbole de Hilbert d'ordre n sur F^* : c'est un cocycle de Steinberg bilinéaire topologique sur F^* à valeurs dans le groupe $\mu_n(F)$ des racines n -ièmes de l'unité de F , noté $(,)_{n,F}$. En plus de (H₁)-(H₄), il vérifie les propriétés suivantes :

$$(H_5) \begin{aligned} (a,b)_{n,F} (b,a)_{n,F} &= 1 \text{ pour tous } a, b \in F^* \\ (a,b)_{n,F} (-b/a, a+b)_{n,F} &= 1 \text{ si } a+b \neq 0 \\ (a,-a)_{n,F} &= 1. \end{aligned}$$

$$(H_6) (a,b)_{n,F} = 1 \text{ pour tout } b \in F^* \text{ si et seulement si } a \in F^{*n}.$$

Le théorème suivant, dû à C. Moore ([Mo]; voir aussi [Mat] et [St]), montre qu'il suffit de s'intéresser aux extensions centrales topologiques de $SL_2(F)$ par les groupes $\mu_n(F)$, où n est comme ci-dessus.

Théorème 1.3 :

Soit m l'ordre du groupe $\mu(F)$ des racines de l'unité dans le corps F , et $(,)_{m,F}$ le symbole de Hilbert d'ordre m sur F^* . Alors :

- a) Le groupe $SL_2(F)$ possède un revêtement universel, dont le noyau est $\mu(F)$.
- b) Soit C un groupe abélien localement compact séparable. Tout cocycle de Steinberg bilinéaire topologique sur F^* à valeurs dans C se factorise de manière unique à travers $(,)_{m,F}$ en un homomorphisme continu de $\mu(F)$ dans C .

PROPRIÉTÉS FONDAMENTALES

Remarque :

Plus généralement, le groupe $G(F)$ des points sur F d'un groupe G simple, simplement connexe, déployé sur F , possède un revêtement universel de noyau $\mu_n(F)$, associé au symbole de Hilbert d'ordre n de la manière indiquée dans [Mo] ou [Mat].

Corollaire 1.4 :

Soit n un entier tel que F contienne n racines n -ièmes de l'unité distinctes.

Il y a exactement n classes d'extensions centrales de $SL_2(F)$ par $\mu_n(F)$, le groupe des racines n -ièmes de l'unité de F . Elles sont associées aux cocycles sur $SL_2(F)$ à valeurs dans $\mu_n(F)$ suivants :

$$\begin{aligned} \alpha_i(g, g') &= (\chi(g), \chi(g'))_{n, F}^i \left(\frac{-\chi(g')}{\chi(g)}, \chi(gg') \right)_{n, F}^i \\ &= \left(\frac{-\chi(gg')}{\chi(g)}, \frac{\chi(gg')}{\chi(g')} \right)_{n, F}^i, \quad \text{pour } g, g' \in SL_2(F), 1 \leq i \leq n, \\ &\text{avec } \chi \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{cases} c & \text{si } c \neq 0 \\ d & \text{sinon.} \end{cases} \end{aligned}$$

Soit n tel que $\mu_n(F)$ soit d'ordre n ; on pose $\alpha = \alpha_1$. Alors :

Définition 1.5 :

On appelle revêtement métaplectique d'ordre n de $SL_2(F)$, l'extension centrale de $SL_2(F)$ par $\mu_n(F)$: $1 \rightarrow \mu_n(F) \rightarrow \widetilde{SL}_2(F) \rightarrow SL_2(F) \rightarrow 1$, définie par la loi :

$$(g, \xi)(g', \xi') = (gg', \xi \xi' \alpha(g, g')), \quad g, g' \in SL_2(F), \xi, \xi' \in \mu_n(F).$$

C'est une extension centrale topologique, associée au symbole de Hilbert d'ordre n sur F^* .

Remarques :

- Cette extension de $SL_2(F)$ par μ_n a été construite directement par T. Kubota [Ka1] indépendamment des travaux de C. Moore.
- Le cocycle α est trivial sur les deux sous-groupes unipotents standard.

b) Passage à $GL_2(F)$.

On ne parlera pas de revêtements pour le groupe $GL_2(F)$, qui n'est pas engendré par ses commutateurs. Cependant, partant du revêtement métaplectique d'ordre n de $SL_2(F)$, on va construire, comme l'a fait Kubota dans [Ka2], le groupe métaplectique d'ordre n sur $GL_2(F)$:

Théorème 1.6 :

Soit n un entier tel que $\mu_n(F)$ soit d'ordre n . Il y a, à isomorphisme près, une unique extension centrale topologique de $GL_2(F)$ par $\mu_n(F)$ vérifiant les deux conditions suivantes :