JEAN-PIERRE DEMAILLY

Mesures de Monge-Ampère et caractérisation géométrique des variétés algébriques affines

Mémoires de la S. M. F. 2e série, tome 19 (1985)
<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1985_2_19__1_0>

Mémoire de la Société Mathématique de France, n°19
Supplément au Bulletin de la S.M.F.
Tome 113, 1985, fascicule 2

MESURES DE MONGE-AMPÈRE ET CARACTÉRISATION GÉOMÉTRIQUE DES VARIÉTÉS ALGÉBRIQUES AFFINES

par Jean-Pierre DEMAILLY

RÉSUMÉ.

A toute fonction d'exhaustion plurisousharmonique continue φ sur un espace de Stein, nous associons une collection de mesures positives portées par les surfaces de niveau de φ, et définies à l'aide des opérateurs de Monge-Ampère au sens de Bedford et Taylor. Nous montrons que ces mesures jouent un rôle fondamental dans l'étude des propriétés de croissance et de convexité des fonctions plurisousharmoniques ou holomorphes. Lorsque le volume de Monge-Ampère de la variété est fini, un théorème d'algébricité de type Siegel s'applique aux fonctions holomorphes à croissance φ-polynomiale. Nous en déduisons que la finitude du volume de Monge-Ampère, associée à une minoration convenable de la courbure de Ricci, est une condition géométrique nécessaire et suffisante caractérisant les variétés algébriques affines.

ABSTRACT.

To every continuous plurisubharmonic exhaustion function φ on a Stein space, we associate a collection of positive measures with support in the level sets of φ, defined by means of the Monge-Ampère operators in the sense of Bedford and Taylor. We show that these measures play a prominent part in the study of growth and convexity properties of plurisubharmonic or holomorphic functions. When the variety has finite Monge-Ampère volume, an algebraicity theorem of Siegel type holds for holomorphic functions with φ-polynomial growth. From this result, we deduce that the finiteness of Monge-Ampère volume, together with a suitable lower bound of the Ricci curvature, is a necessary and sufficient geometric condition characterizing affine algebraic varieties.

TABLE DES MATIERES

0. - Introduction.

La présente étude se place dans le cadre général des espaces analytiques complexes. La première section est donc consacrée à une définition des formes différentielles, courants positifs et fonctions plurisousharmoniques sur un espace complexe X éventuellement singulier. Etant donné un plongement local de X dans un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}^N$, nous définissons les formes différentielles sur X comme les restrictions à X des formes "ambiantes" sur Ω ; les espaces de courants s'en déduisent par dualité comme dans le cas lisse.

DEFINITION 0.1. - Soit une fonction $V : X \to [-\infty, +\infty[$.

(a) V sera dite plurisousharmonique (psh en abrégé) sur X si V est localement restriction à X de fonction psh sur l'espace ambiant $\mathbb{C}^N$.

(b) V sera dite faiblement psh si V est localement intégrable et majorée sur X , et si $dd^c V \geq 0$.

Toute fonction psh est alors faiblement psh , mais en général une fonction faiblement psh ne s'identifie pas nécessairement presque partout à une fonction psh . Nous montrons toutefois que les deux notions coïncident lorsque l'espace X est localement irréductible. La démonstration de ce résultat fait usage de deux ingrédients : d'une part la caractérisation des fonctions psh due à Fornaess et Narasimhan [FN] , d'autre part un théorème de prolongement des fonctions psh bornées à travers le lieu singulier de X (qui utilise la résolution des singularités). Nous étudions également la transformation des courants positifs fermés et des fonctions psh par image directe propre.

Dans le § 2, nous reprenons essentiellement la méthode développée par Bedford et Taylor [BT 2] pour donner un sens au courant positif $dd^c\varphi_1 \wedge \ldots \wedge dd^c\varphi_k$ lorsque les φ_j sont des fonctions psh localement bornées, et nous la généralisons au cas où l'une des fonctions (soit φ_1 par exemple) n'est pas localement bornée. Les inégalités classiques de Chern-Levine-Nirenberg peuvent alors s'énoncer comme suit :

THEOREME 0.2. - <u>Pour tout ouvert</u> $\omega \subset\subset X$ <u>et tout compact</u> $K \subset \omega$ <u>il existe des constantes</u> C_1, C_2 <u>ne dépendant que de</u> ω <u>et</u> K <u>telles qu'on ait les majorations de masse suivantes</u> :

(a) $\int_K \|dd^c\varphi_1 \wedge \ldots \wedge dd^c\varphi_k\| \leq C_1 \|\varphi_1\|_{L^1(\omega)} \|\varphi_2\|_{L^\infty(\omega)} \cdots \|\varphi_k\|_{L^\infty(\omega)}$,

(b) $\int_K \|\varphi_1 dd^c\varphi_2 \wedge \ldots \wedge dd^c\varphi_k\| \leq C_2 \|\varphi_1\|_{L^1(\omega)} \|\varphi_2\|_{L^\infty(\omega)} \cdots \|\varphi_k\|_{L^\infty(\omega)}$.

Nous montrons finalement dans cette situation la continuité séquentielle des opérateurs de Monge-Ampère

$$(\varphi_1, \ldots, \varphi_k) \longmapsto dd^c\varphi_1 \wedge \ldots \wedge dd^c\varphi_k \quad \text{et} \quad \varphi_1 dd^c\varphi_2 \wedge \ldots \wedge dd^c\varphi_k$$

pour des suites décroissantes $\varphi_1^\nu, \ldots, \varphi_k^\nu$ de fonctions psh .

On suppose maintenant que X est un espace de Stein et que X est muni d'une fonction psh continue exhaustive $\varphi : X \to [-\infty, R[$. Nous noterons alors

$$B(r) = \{z \in X \ ; \ \varphi(z) < r\} \ , \quad S(r) = \{z \in X \ ; \ \varphi(z) = r\} \ , \quad r \in [-\infty, R[$$

les "pseudoboules" et "pseudosphères" associées à φ . A ces données, nous montrons qu'on peut associer de manière naturelle une collection de mesures positives μ_r , portées par les sphères $S(r)$, que nous appelons mesures de Monge-Ampère associées à φ . Celles-ci sont définies simplement par

$$\mu_r(h) = \int_{S(r)} h(dd^c\varphi)^{n-1} \wedge d^c\varphi \quad , \quad n = \dim X ,$$

lorsque φ est de classe C^2 et lorsque r est valeur régulière de φ . Dans le cas où φ est seulement continue, on est amené à utiliser la définition de Bedford-Taylor pour $(dd^c)^n$ et à poser

$$\mu_r = (dd^c \max(\varphi, r))^n - \mathbb{1}_{X\setminus B(r)} (dd^c\varphi)^n .$$

On a alors une formule générale de type Jensen-Lelong, dont la démonstration est conséquence immédiate des théorèmes de Stokes et de Fubini (cf. § 3).

THEOREME 0.3. - Toute fonction psh V sur X est μ_r-intégrable quel que soit $r < R$, et on a la formule

$$\int_{-\infty}^{r} dt \int_{B(t)} dd^cV \wedge (dd^c\varphi)^{n-1} = \mu_r(V) - \int_{B(r)} V(dd^c\varphi)^n .$$

On montre de plus que les mesures μ_r dépendent continûment de φ relativement aux suites décroissantes. Ceci permet de voir comme dans le cas C^∞ que la famille (μ_r) est la famille de mesures faiblement continue à gauche qui désintègre le courant positif $(dd^c\varphi)^{n-1} \wedge d\varphi \wedge d^c\varphi$ sur les sphères $S(r)$.

Les mesures μ_r ainsi construites jouissent d'un certain nombre de propriétés naturelles importantes pour l'étude de la croissance et de la convexité des fonctions psh .

Le paragraphe 4 étudie la mesure "résiduelle" $\mu_{-\infty} = \mathbb{1}_{S(-\infty)}(dd^c\varphi)^n$, portée par l'ensemble polaire $S(-\infty)$. D'après (0.3), la mesure $\mu_{-\infty}$ peut aussi se définir comme la limite faible de μ_r quand r tend vers $-\infty$. En nous inspirant de nos travaux antérieurs [D4, D5] , nous montrons que la mesure $\mu_{-\infty}$ ne dépend essentiellement que du comportement asymptotique de φ au voisinage de $S(-\infty)$. De ce résultat découle l'inégalité classique

$$(0.4) \qquad (dd^c\varphi)^n \geq 2^n \sum_{x\in X} \nu(\varphi, x)^n \delta_x \quad ,$$

où $\nu(\varphi, x)$ désigne le nombre de Lelong de φ en tout point $x \in X$, et δ_x la mesure de Dirac en x (en un point singulier x, cette mesure doit être comptée avec multiplicité égale à la multiplicité de X en x).

Au § 5, nous montrons que les mesures μ_r vérifient le principe du maximum vis à vis des fonctions psh, à savoir que pour toute fonction psh V on a l'égalité :

(0.5) $\quad \sup_{B(r)} V = \sup$ essentiel de V relativement à μ_r.

Le fait remarquable est que l'égalité a lieu bien que le support de μ_r puisse être très lacunaire dans $S(r)$, comme par exemple dans le cas où les pseudoboules $B(r)$ sont des polyèdres analytiques.

Le paragraphe 6 généralise à la présente situation les propriétés de convexité classiques dues à P. Lelong, relatives aux moyennes de fonctions psh sur les boules, sphères, polydisques... . Nous montrons que l'hypothèse géométrique naturelle qui sous-tend la validité des propriétés de convexité est le fait que la fonction φ soit solution de l'équation de Monge-Ampère homogène $(dd^c\varphi)^n \equiv 0$. De façon précise :

THEOREME 0.6. - <u>On suppose que</u> $(dd^c\varphi)^n \equiv 0$ <u>sur l'ouvert</u> $\{\varphi > A\}$. <u>Soit</u> V <u>une fonction</u> psh <u>sur</u> X. <u>Alors le</u> sup <u>de</u> V <u>sur</u> $B(r)$, <u>les moyennes</u> $\mu_r(V)$, <u>et plus généralement les moyennes en norme</u> L^p, $[\mu_r(V_+^p)]^{1/p}$, <u>sont fonctions convexes croissantes de</u> $r \in \,]A, R[$.

La vérification de ce résultat s'obtient par des calculs élémentaires de dérivées secondes, faisant intervenir la formule de Jensen 0.3 et les théorèmes de Stokes et de Fubini. Plus généralement, nous démontrons une version avec "paramètre" du théorème 0.6, relative aux mesures $\mu_{y,r}$ sur les fibres $\pi^{-1}(y)$ d'une fibration holomorphe $\pi : X \to Y$. La fonction psh φ donnée sur X est supposée exhaustive sur les fibres et telle que $(dd^c\varphi)^n \equiv 0$ sur l'ouvert $\{\varphi > A\}$, où n est la dimension des fibres. Alors les moyennes $\mu_{y,r}(V)$ et les moyennes en norme L^p sont fonctions faiblement psh du couple (y,z) sur $Y \times \mathbb{C}$, si l'on pose $r = \mathrm{Re}\, z$. On en tire aisément l'extension suivante du théorème 0.6 aux espaces produits.

THEOREME 0.7. - Soient $X_1,\dots,X_k$ des espaces de Stein, munis de fonctions psh continues exhaustives $\varphi_j : X_j \to [-\infty, R_j[$ telles que $(dd^c\varphi_j)^{n_j} \equiv 0$ sur l'ouvert $\{\varphi_j > A_j\}$, $n_j = \dim X_j$. Alors, si V est psh sur $X_1 \times \dots \times X_k$, la moyenne en norme L^p

$$M_V^p(r_1,\dots,r_k) = [\mu_{r_1} \otimes \dots \otimes \mu_{r_k}(V_+^p)]^{1/p}$$

est convexe simultanément en les variables $(r_1,\dots,r_k) \in \prod]A_j, R_j[$.

Dans les paragraphes 7 et 8, nous faisons l'hypothèse additionnelle que le volume de X est à croissance modérée à l'infini (le "rayon" R est ici supposé égal à $+\infty$). De façon précise, nous supposons que

$$(0.8) \qquad \lim_{r\to+\infty} \frac{1}{r}\|\mu_r\| = 0 .$$

Sous cette hypothèse, la formule de Jensen 0.3 implique l'inégalité fondamentale suivante :

$$(0.9) \qquad \int_X dd^c V \wedge (dd^c\varphi)^{n-1} \leq \liminf_{r\to+\infty} \frac{1}{r}\mu_r(V_+) ,$$

de laquelle découle un certain nombre de résultats concernant la croissance des fonctions psh ou la distribution des valeurs des fonctions holomorphes (comme le suggère l'article de N. Sibony et P.M. Wong [SW]). En particulier, toute fonction psh ou holomorphe bornée sur X est constante.

Etant donné une fonction holomorphe f sur X, nous définissons d'autre part le "degré" de f relativement à φ par

$$(0.10) \qquad \delta(f) = \limsup_{r\to+\infty} \frac{1}{r}\mu_r(\mathrm{Log}_+|f|) ,$$

et nous disons que f est φ-polynomiale si $\delta(f)$ est fini. L'inégalité (0.9) entraîne alors que l'ordre d'annulation de f en un point régulier $a \in X$ vérifie l'estimation :

$$\mathrm{ord}_a(f) \leq C(a)\,\delta(f) .$$

Par un raisonnement élémentaire d'algèbre linéaire dû à Siegel, il en résulte le théorème d'algébricité suivant (on suppose X irréductible).

THEOREME 0.11. - Soit $K_\varphi(X)$ le corps des fonctions méromorphes de la forme f/g où f et g sont φ-polynomiales. Alors :

(a) $0 \leq \deg \mathrm{tr}_{\mathbb{C}} K_\varphi(X) \leq \dim_{\mathbb{C}} X$;

(b) Si $\deg \mathrm{tr}_{\mathbb{C}} K_\varphi(X) = \dim_{\mathbb{C}} X$, alors le corps $K_\varphi(X)$ est de type fini.

Comme cas particulier de ce théorème, nous retrouvons le résultat de W. Stoll [St 1] caractérisant les variétés algébriques dans $\mathbb{C}^N$ par la propriété que la croissance de l'aire est minimale.

La deuxième partie B de ce travail est consacrée à une caractérisation des variétés algébriques affines par un critère géométrique "intrinsèque", faisant intervenir la finitude du volume de Monge-Ampère et une minoration de la courbure de Ricci. De façon précise, nous démontrons le résultat suivant :

THEOREME 0.12. - Soit X une variété analytique complexe, lisse, connexe, de dimension n . Alors X est analytiquement isomorphe à une variété algébrique affine X_{alg} si et seulement si X vérifie la condition (c) ci-dessous et si X possède une fonction d'exhaustion φ strictement psh de classe C^∞ telle que :

(a) $\mathrm{Vol}(X) = \int_X (dd^c\varphi)^n < +\infty$;

(b) La courbure de Ricci de la métrique $\beta = dd^c(e^\varphi)$ admet une minoration de la forme

$\mathrm{Ricci}(\beta) \geq -\frac{1}{2}dd^c\psi$

avec $\psi \in C^0(X,\mathbb{R})$, $\psi \leq A\varphi + B$, A , B constantes ≥ 0 .

(c) Les espaces de cohomologie de degré pair $H^{2q}(X;\mathbb{R})$ sont de dimension finie.

L'anneau des fonctions régulières de la structure algébrique X_{alg} est alors donné par $K_\varphi(X) \cap \mathcal{O}(X)$.

A la suite des travaux de W. Stoll sur les variétés strictement paraboliques (cf. [St 2] et [Bu]), D. Burns a posé le problème de la caractérisation des variétés algébriques affines en termes de fonctions d'exhaustion ayant des propriétés particulières, vérifiant par exemple la condition d'homogénéité $(dd^c\varphi)^n \equiv 0$ en dehors d'un compact. Le théorème 0.12 apporte une réponse partielle à ce problème. Il s'inscrit d'autre part dans la lignée des conditions suffisantes obtenues par Mok, Siu et Yau [SY] , [MSY] , [Mok 1,2,3] , bien que nos hypothèses soient sensiblement différentes de celles des travaux précédemment cités. Notre argumentation est d'ailleurs analogue dans ses grandes lignes à la démarche suivie par [Mok 1,2,3] .

Le paragraphe 10 démontre la nécessité des conditions 0.12 (a,b,c) pour tout ensemble algébrique $X \subset \mathbb{C}^N$. La fonction φ est alors donnée par $\varphi(z) = \mathrm{Log}(1+|z|^2)$, de sorte que la métrique $dd^c\varphi$ coïncide avec la métrique de Fubini-Study de l'espace projectif $\mathbb{P}^N$. Grâce à un calcul explicite de la courbure de Ricci, nous vérifions que l'inégalité de courbure (b) a lieu avec $\psi = \mathrm{Log}\sum_{K,L}|J_{K,L}|^2$, où les $J_{K,L}$ désignent les déterminants jacobiens associés à un système d'équations polynomiales de X . Nous montrons de plus par un contre-exemple que la condition de courbure (b) est bien indispensable.