MICHEL GROS

Classes de Chern et classes de cycles en cohomologie de Hodge-Witt logarithmique

Mémoires de la S. M. F. 2e série, tome 21 (1985)

<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1985_2_21__1_0>

Mémoire de la Société Mathématique de France, n° 21
Supplément au Bulletin de la S.M.F., Tome 113, 1985, fascicule 4

CLASSES DE CHERN ET CLASSES DE CYCLES EN COHOMOLOGIE DE HODGE-WITT LOGARITHMIQUE

MICHEL GROS (*)

Résumé

Si k est un corps parfait de caractéristique $p>0$, on définit, pour tout k-schéma lisse X, une théorie de classes de Chern et de classes de cycles à valeurs dans les groupes de cohomologie étale $H^i(X_{ét}, W_n\Omega^i_{\log})$, où $W_n\Omega^{\cdot}_X$ est le complexe de de Rham-Witt de cran n de X et $W_n\Omega^i_{\log}$ le sous-faisceau abélien de $W_n\Omega^i_X$ engendré localement, pour la topologie étale, par les différentielles logarithmiques. Via l'application naturelle de $H^i(X_{ét}, W_n\Omega^i_{\log})$ dans le groupe de cohomologie cristalline $H^{2i}_{cris}(X/W_n)$, on retrouve les classes de Chern de Berthelot-Illusie, et la classe de cohomologie d'un sous-schéma fermé lisse construite par Berthelot. Notre construction de la classe de cohomologie d'un cycle repose sur un théorème de pureté pour les faisceaux $W_n\Omega^i_{\log}$. On montre que cette classe transforme intersections propres en cup-produits, et l'on prouve la compatibilité usuelle entre classe de Chern et classe de cycle pour un sous-schéma fermé (non nécessairement lisse).

Abstract

Let k be a perfect field of characteristic $p>0$. For every smooth k-scheme X, we define a theory of Chern classes and cycle classes with value in the étale cohomology groups $H^i(X_{ét}, W_n\Omega^i_{\log})$, where $W_n\Omega^{\cdot}_X$ is the Rham-Witt complex of X of step n and $W_n\Omega^i_{\log}$ the abelian subsheaf of $W_n\Omega^i_X$ generated locally for the étale topology by the logarithmic differentials. Via the natural map from $H^i(X_{ét}, W_n\Omega^i_{\log})$ to the crystalline cohomology group $H^{2i}_{cris}(X/W_n)$, we recover Berthelot-Illusie's Chern classes and the cohomology class of a smooth closed subscheme constructed by Berthelot. Our construction of the cycle class relies on a purity theorem for the sheaves $W_n\Omega^i_{\log}$. We show that proper intersections correspond to cup-products and we prove the usual compatibility between the Chern class and the cycle class of a (non necessarily smooth) closed subscheme.

Texte reçu le 15 avril 1985

(*) Thèse de doctorat de 3e cycle de Mathématiques, Université de Paris-Sud, Centre d'Orsay, juin 83.

0037-9484/85 04/1-88 $ 10.80 © Gauthier-Villars

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

Soient k un corps parfait de caractéristique $p > 0$ et X un k-schéma lisse. Si Y est un sous-schéma fermé lisse de X de codimension r, on sait (cf. [2]) lui associer une classe fondamentale de cohomologie $cl(Y/X)$ dans la cohomologie cristalline $H^{2r}_{cris}(X/W(k))$ de X sur les vecteurs de Witt $W(k)$ de k. Un des objets du présent travail est de s'affranchir de l'hypothèse de lissité faite sur Y en employant des techniques afférentes au complexe de De Rham-Witt ([21]).

Des exemples tels ceux de la cohomologie étale à valeurs dans $\mathbf{Z}_\ell$ $(\ell \neq p)$ ou de la cohomologie de De Rham en caractéristique 0 montrent que la définition de la classe de cohomologie d'un cycle éventuellement singulier est possible dès que l'on dispose d'un théorème de pureté permettant d'exprimer de manière plus simple certains groupes de cohomologie à support. Il est bien connu (cf. [2]) que la cohomologie cristalline ne vérifie pas de tels théorèmes de pureté. On peut toutefois travailler avec des groupes de cohomologie "plus fins", tels que les groupes de cohomologie logarithmiques $H^*(X_{et}, W_n\Omega^*_{X,\log})$, où les faisceaux étales $W_n\Omega^*_{X,\log}$ sont les faisceaux définis dans [21] (ils diffèrent très légèrement des faisceaux $\nu_n(i)$ introduits par Milne dans [28]).

En effet, on verra que ces faisceaux vérifient des propriétés de pureté suffisantes pour permettre une définition satisfaisante de la classe de cohomologie d'un cycle éventuellement singulier. Comme ils semblent d'autre part jouer un rôle important dans diverses questions de géométrie arithmétique (cf. [5], [7], [25]), il nous a paru utile de donner certaines constructions et théorèmes concernant ces faisceaux : classes de Chern, classes de cycles, cohomologie d'un schéma éclaté, formule de self-intersection, théorème de Riemann-Roch pour une immersion fermée.

INTRODUCTION

Le chapitre I est essentiellement consacré au calcul de $Rf_*W_n\Omega^{\cdot}_P$ et $Rf_*W_n\Omega^*_{P,\log}$ où P est le fibré projectif associé à un $\mathcal{O}_X$-Module localement libre de rang $r+1$ et f la projection canonique $P \longrightarrow X$. Par analogie avec le calcul de $Rf_*\Omega^{\cdot}_P$ (cf. [4] ou [14]), on construit des morphismes canoniques dans des catégories dérivées convenables

$$(1) \qquad \bigoplus_{i=0}^{r} W_n\Omega^{\cdot}_X(-i)[-i] \longrightarrow Rf_*W_n\Omega^{\cdot}_P$$

$$(2) \qquad \bigoplus_{i=0}^{r} W_n\Omega^*_{X,\log}(-i)[-i] \longrightarrow Rf_*W_n\Omega^*_{P,\log} \,,$$

dont on montre que ce sont des isomorphismes. Grosso modo, (2) se déduit de (1) en prenant "les points fixes sous F". La vérification que (1) est un isomorphisme utilise le "lemme de Nakayama d'Ekedahl" (cf. [9], [22]) pour se ramener au cas $n=1$.

Au chapitre II, nous développons une théorie du morphisme de Gysin pour des morphismes propres entre k-schémas lisses. Après un rappel des résultats de dualité du complexe de De Rham-Witt dus à T. Ekedahl, nous construisons pour tout morphisme propre $f : Y \longrightarrow X$ entre k-schémas lisses, un morphisme de Gysin

$$(3) \qquad f_* : Rf_*W\Omega^{\cdot}_Y \longrightarrow W\Omega^{\cdot}_X(r)[r] \qquad (r = \dim(X) - \dim(Y))$$

dans la catégorie dérivée des R_X-Modules où R_X est un certain faisceau d'anneaux sur X défini par T. Ekedahl et généralisant l'anneau R de [23]. Par application d'un foncteur "points fixes sous F", on en déduit un morphisme

$$(4) \qquad f_* : Rf_*W.\Omega^*_{Y,\log} \longrightarrow W.\Omega^*_{X,\log}(r)[r]$$

dans la catégorie dérivée des $W.\Omega^*_{X,\log}$-pro-Modules.

Au numéro 2, on énonce diverses propriétés de (4) : transitivité, formule de projection, etc.

Le numéro 3 est indépendant des résultats de T. Ekedahl. On propose dans le cas où f est une immersion fermée, une construction d'un morphisme

$$(5) \qquad W_n\Omega^{\cdot}_Y \longrightarrow \underline{H}^{\cdot r}_Y(W_n\Omega^{\cdot}_X(r))$$

à l'aide de relèvements locaux Y' et X' de Y et X sur W_n et du morphisme de Gysin en cohomologie de De Rham (cf. [2])

(6) $$\Omega^{\cdot}_{Y'/W_n} \longrightarrow \underline{H}^{\cdot r}_{Y'}(\Omega^{\cdot}_{X'/W_n}(r)) \ .$$

Ceci est rendu possible par l'utilisation de l'isomorphisme (cf. [23])

(7) $$W_n\Omega^i_X \xrightarrow{\sim} \underline{H}^i(\Omega^{\cdot}_{X'/W_n}) \ .$$

On vérifie que le morphisme ainsi construit est bien identique à celui qu'on déduit de (3).

Par application du foncteur "points fixes sous F", (6) fournit un morphisme

(8) $$W_n\Omega^*_{Y,\log} \longrightarrow \underline{H}^{*r}_Y(W_n\Omega^*_{X,\log}(r))$$

qui est en fait un isomorphisme.

Ce morphisme diffère des morphismes que l'on peut déduire de (4), mais l'on peut récupérer (4) à l'aide de (8) et démontrer ainsi certaines des propriétés énoncées au numéro 2.

Le numéro 4 donne la définition de la classe d'un cycle éventuellement singulier de X (construction faite indépendamment par Milne dans [30]). La méthode est assez proche du cas de la cohomologie de De Rham en caractéristique 0, à ceci près qu'ici, on n'a pas $\underline{H}^{r+1}_Y(W_n\Omega^*_{X,\log}) = 0$. On termine ce numéro en prouvant la compatibilité de la classe ainsi construite aux intersections, puis en prouvant que deux cycles algébriquement équivalents ont même classe de cohomologie.

Au numéro 5, nous revenons au cas d'un morphisme propre quelconque et montrons comment réaliser (3) à l'aide de complexes de Cousin.

Le chapitre III est consacré à la définition des classes de Chern $c_i(E) \in H^i(X, W_n\Omega^i_{X,\log})$ attachées à tout $\mathcal{O}_X$-Module localement libre de rang fini. Compte tenu des résultats du premier chapitre et de la théorie du morphisme de Gysin pour une immersion fermée (y compris la compatibilité à la première classe de Chern dans le le cas de la codimension 1), les méthodes sont essentiellement standard (cf. [13] et [SGA 5, VII]).

Le numéro 2 est consacré à la comparaison des classes ainsi définies avec les classes de Chern cristallines de [4]. On termine le chapitre par le calcul de la cohomologie d'un schéma de drapeaux.

Au chapitre IV, nous calculons la cohomologie d'un schéma éclaté par des techniques analogues à celles utilisées pour prouver que (1) et (2) sont des isomorphismes. On en déduit la "formule de self-intersection"

$$(9) \qquad i^*i_*(y) = yc_{r+1}(\check{N}) \in H^{r+1}(X, W_n\Omega^{r+1}_{X,\log})$$

pour i une immersion fermée lisse de codimension $r+1$ définie par un idéal J de $\mathcal{O}_X$ et $N = J/J^2$.

Nous prouvons également une variante de la "formule-clef" de ([SGA 5, VII]) et de la formule "habituelle" comparant classe de Chern et classe de cycle

$$(10) \qquad c_{r+1}(i_*\mathcal{O}_Y) = (-1)^r r!\,\mathrm{cl}(Y/X) \in H^{r+1}(X, W_n\Omega^{r+1}_{X,\log}) \ .$$

C'est une conséquence facile du théorème de Riemann-Roch pour une immersion fermée dont la démonstration est essentiellement la même qu'en [24].

Ce travail où intervient de manière essentielle la théorie du complexe de De Rham-Witt et des R_X-Modules m'a été suggéré par L. Illusie. Je tiens à lui exprimer ici toute ma gratitude pour la patience avec laquelle il m'a prodigué conseils et encouragements tout au long du travail.

P. Berthelot et T. Ekedahl ont bien voulu lire une première version de la thèse et corriger certaines erreurs. Qu'ils en soient ici chaleureusement remerciés. Je remercie également O. Gabber qui m'a communiqué certains résultats qui ont servi de catalyseur à ceux présentés ici.

(Ajouté en octobre 1985) Nous venons de prendre connaissance d'un preprint de H. Gillet et W. Messing intitulé "Cycle Classes and Riemann-Roch for Crystalline Cohomology", donnant, pour X lisse sur un corps k de caractéristique $p>0$, une théorie de classes de cycles à valeurs dans les groupes de cohomologie cristalline $H^{2i}_{cris}(X/C)\otimes\mathbb{Q}$ (C = anneau de Cohen pour k). Pour k parfait (et $C=W$), cette théorie se déduit de celle construite ici via l'application composée $H^i(X_{ét},W\Omega^i_{log}) \longrightarrow H^{2i}(X/W) \longrightarrow H^{2i}(X/W)\otimes\mathbb{Q}$, comme il résulte de III 2.1 et IV 3.

NOTATIONS ET CONVENTIONS

Dans tout ce travail, on fixe un nombre premier p et un corps parfait k de caractéristique p. On note

$W(k)$ (ou W) : l'anneau des vecteurs de Witt sur k,

$W_n(k)$ (ou W_n) : $W(k)/p^n$, l'anneau des vecteurs de Witt de longueur n.

Si X est un k-schéma, on note :

$\mathbb{G}_m = \mathcal{O}_X^*$ le groupe multiplicatif sur X

$\Omega_X^\cdot$ le complexe de De Rham de X sur k

$W_n\Omega_X^\cdot$ le complexe de De Rham-Witt de X de cran n ([21], I 1.12)

$W.\Omega_X^\cdot$ le système projectif (ou parfois le pro-objet) formé par les $W_n\Omega_X^\cdot$ et les flèches de restriction $W_{n+1}\Omega_X^\cdot \longrightarrow W_n\Omega_X^\cdot$, notées π.

$W\Omega_X^\cdot$: $\varprojlim W_n\Omega_X^\cdot$ le complexe de De Rham-Witt de X

$\underline{x} = (x,0,0,\dots) \in W\mathcal{O}_X$ (ou $W_n\mathcal{O}_X$) le représentant de Teichmüller de $x \in \mathcal{O}_X$.

Si M est un complexe (d'une catégorie abélienne), on note $M^{\leqslant i}$, $M^{\geqslant i}$ les tronqués naïfs de M et $t_{\leqslant i}M$, $t_{\geqslant i}M$ les tronqués canoniques de M :

$$M^{\leqslant i} = (\dots \longrightarrow M^{i-1} \longrightarrow M^i \longrightarrow 0) \quad , \quad M^{\geqslant i} = (0 \longrightarrow M^i \longrightarrow M^{i+1} \longrightarrow \dots)$$

$$t_{\leqslant i}M = (\dots \longrightarrow M^{i-1} \longrightarrow Z^iM \longrightarrow 0) \quad , \quad t_{\geqslant i}M = (0 \longrightarrow M^i/B^iM \longrightarrow M^{i+1} \longrightarrow \dots)$$

où $Z^iM = \mathrm{Ker}\, d$, $B^iM = \mathrm{Im}\, d$).

Si $P^\cdot$ est un objet gradué et si $r \in \mathbb{Z}$, $P^\cdot(r)$ désigne l'objet gradué défini par $(P^\cdot(r))^i = P^{r+i}$.

Si L est un faisceau, la notation $x \in L$ signifie que x est une section locale de L.

L'écriture $a := b$ signifie que a est défini par b.