MÉMOIRES DE LA S. M. F.

HENRY MAILLOT

Courbures et basculements des sous-variétés riemanniennes

Mémoires de la S. M. F. 2e série, tome 22 (1986)
<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1986_2_22__1_0>

© Mémoires de la S. M. F., 1986, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mémoires de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Memoires/Presentation.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Mémoire de la Société Mathématique de France, n° 22
Supplément au Bulletin de la S.M.F.
Tome 114, 1986, fascicule 1

COURBURES ET BASCULEMENTS DES SOUS-VARIETES RIEMANNIENNES

par

MAILLOT Henry

A MES PARENTS

Résumé.

Dans ce travail, après avoir rappelé les définitions et résultats de l'article [Ma.1] nous poursuivons notre étude des relations entre le tenseur de courbure de Riemann-Christoffel d'une sous-variété V et les variations angulaires de l'espace tangent à V.

En chaque point de V nous avons défini un endomorphisme β qui mesure les variations angulaires de l'espace tangent à V. Lorsque V est une sous-variété compacte de $\mathbb{R}^n$, l'intégrale du déterminant de β est liée aux nombres de Betti de V.

Nous définissons la notion de roulis de V suivant un vecteur tangent à V. Ceci conduit en particulier à des définitions en codimension quelconque des directions et des lignes de courbure.

Un "théorème de Joachimsthal" est démontré.

Nous définissons et étudions les directions principales "longitudinales" des tubes autour de V. Des relations avec la courbure de la connexion normale sont établies.

Abstract.

In this work, after recalling the results of the article [Ma.1] we continue our study of the relationship between the Riemann-Christoffel curvature tensor

Manuscrit reçu le 4 juin 1985, Révisé le 12 mars 1986.

0037-9484/86 01/1-154 $ 17.40 © Gauthier-Villars

of a submanifold V and the angular variations of the tangent space to V.

At each point of V we have defined an endomorphism β which measures the angular variations of the tangent space to V.

If V is a compact submanifold of R^n then the integral of the determinant of β is linked to the Betti numbers of V.

We define the notion of roll of V with respect to a tangent vector to V. This leads in particular to definitions, for any dimension, of directions and lines of curvature.

A "Joachimsthal theorem" is proved.

We define and study the "longitudinal" principal directions of the tube over V.

Relations with the curvature of the normal connection are established.

SOMMAIRE

0. Notations générales et résumé de l'article [Ma.1]

1. Notations et conventions générales
2. Rappels d'algèbre euclidienne
3. Définition et signification géométrique de l'endomorphisme de bascule
4. Courbure aréolaire d'une sous-variété
5. Sous-variétés minimales et sous-variétés isobasculantes
6. Relations entre l'opérateur de courbure de V et l'endomorphisme de bascule dans le cas où $\tilde{V}$ a une courbure nulle
7. Endomorphismes de bascule et courbures aréolaires d'un produit de sous-variétés.

I. Basculements, tangages, diamètres et courbures

1. Compléments sur les endomorphismes de bascule et les sous-variétés isobasculantes
2. Existence de points d'*-convexité
3. Courbures, tangages et diamètres
4. Basculements et transports parallèles
5. Courbure aréolaire et nombres de Betti.

II. Roulis et rotations instantanées

1. Notations et rappels
2. Un invariant conforme : le roulis
3. Roulis et intersections de sous-variétés, théorème de Joachimsthal
4. Rotations instantanée g_u associée à un vecteur u tangent à V, relations avec courbures intrinsèques, basculements, tangages et roulis.
5. Tangages, roulis et basculements dans les sous-variétés produits
6. Indice de nullité de roulis et courbure de la connexion normale
7. Liaisons entre tangages, roulis et basculements.

III. Sous-espaces centraux, translations instantanées et points focaux des sous-variétés d'un espace euclidien

1. Notations et préliminaires
2. Champ de Killing X_u, sous-espace central $\mathscr{C}_u$, point central H_u et translation instantanée $\mathcal{T}_u$ associés à un vecteur u tangent à la sous-variété V
3. Vecteurs tangents non dégénérés
4. Vecteurs tels que $g_u = 0$ ou $\mathcal{T}_u = 0$, relations avec les points focaux
5. Limites d'intersections d'espaces normaux, tangents, etc... .

IV. Sur les sous-espaces "longitudinaux" et les directions principales des tubes autour d'une sous-variété

1. Cas où $\tilde{V}$ est un espace euclidien
2. Définitions et propriétés des champs de sous-espaces "longitudinaux" $\mathcal{O}$ $\mathscr{P}$ et $\mathscr{I}$ (pour $\tilde{V}$ quelconque).
3. Cas où $\tilde{V}$ est une variété riemannienne (resp. kählérienne) dont la courbure sectionnelle (resp. sectionnelle holomorphe) est constante.
4. Le champ de sous-espaces $\mathscr{L}$. Définition des directions principales longitudinales (pour $\tilde{V}$ quelconque). Relations entre l'intégrabilité de $\mathscr{L}$ et la platitude de la connexion normale.

Introduction

Depuis Gauss, les Géomètres se sont attachés à distinguer les propriétés géométriques intrinsèques des surfaces de leurs propriétés extrinsèques.

La courbure, dite de Gauss, généralisée en le tenseur de Riemann-Christoffel est devenue le pilier central de la théorie intrinsèque des variétés riemanniennes.

Il n'en reste pas moins que la notion de courbure est à l'origine purement extrinsèque : la courbure intrinsèque des variétés de dimension 1 sur $\mathbb{R}$ est toujours nulle. Le problème de la généralisation des notions de courbures extrinsèques au cas des sous-variétés de dimension quelconque a été traité par de nombreux auteurs (pour une étude récente, voir J.M. MORVAN [Mo]).

Historiquement l'étude locale de la courbure des surfaces dans $\mathbb{R}^3$ s'est faite par l'intermédiaire des "sections normales". A chaque droite D tangente en un point x_o de la surface est associé une "courbure normale" f(D) dont on étudie la variation en fonction de D. On en déduit la définition des directions principales (points stationnaires de f), de la courbure de Gauss, etc. .

Pour une hypersurface de dimension p d'une variété riemannienne $\tilde{V}$ les choses sont analogues, il y a en général p directions stationnaires pour la courbure de la section normale, à savoir les directions principales. La situation est beaucoup plus compliquée lorsque V est une sous-variété de codimension $q > 1$. Dans ce dernier cas, on peut encore associer à chaque droite D tangente en x_o à V une "courbure normale", mais celle-ci n'a pas un comportement simple quand D varie ; en particulier il peut y avoir plus de p directions stationnaires.

Ceci incite à penser que pour une sous-variété de dimension p et de codimension $q > 1$ de $\tilde{V}$ il n'y a pas en général p droites privilégiées jouant le rôle des directions principales d'une hypersurface.

Dans [Ma.1] nous avons montré qu'en fait il existe quand même de telles droites, que nous avons appelées directions de basculement principal.

Nous avons défini un endomorphisme symétrique β de T_xV caractérisé par la propriété suivante :

Soient γ une courbe paramétrée de V, $x_o = \gamma(t_o)$, $u = \gamma'(t_o)$, $\theta(t)$ l'angle $(0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2})$ de $T_{x_o}V$ avec $\tilde{P}_{t_o,t}(T_{\gamma(t)}v)$, où $\tilde{P}_{t_o,t}$ désigne le transport parallèle relatif à $\tilde{V}$, le long de γ, de t à t_o.

Alors $\frac{\theta(t)}{t-t_o}$ tend vers $\|\beta(u)\|$ quand $t \xrightarrow[t>t_o]{} t_o$.

Nous appelons β **l'endomorphisme de bascule** de V au point x. Les **directions de basculement principal** sont, par définition, les directions propres de β.

Ceci nous a conduit naturellement à la définition suivante : une sous-variété V de $\tilde{V}$ est dite **isobasculante** lorsque, pour tout $x \in V$, $\|\beta(u)\|$ reste constant quand u varie dans la sphère unité de T_xV. Pour cela, il faut et il suffit qu'en tout point de V l'endomorphisme β soit une homothétie.

Dans le présent travail, constitué de cinq chapitres que nous allons décrire brièvement, nous poursuivons notre étude des propriétés géométriques liées aux notions de courbures intrinsèques ou extrinsèques d'une sous-variété d'une variété riemannienne.

Les chapitres sont numérotés en chiffres romains, et une référence à (III.5.2) par exemple, renvoie au n° (5.2) de III.

0. Le chapitre 0 contient les notations générales et un résumé de l'article [Ma.1] auquel le présent travail fait suite.

I. Le chapitre I commence par une interprétation de la forme bilinéaire associée à β^2 comme différence de deux métriques.

Ceci nous permet de caractériser les sous-variétés isobasculantes comme étant celles pour lesquelles l'application canonique de V dans le fibré en grassmanniennes d'indice p sur $\tilde{V}$ est une application conforme.

Puis nous donnons une interprétation géométrique de l'indice de nullité relative introduit par Chern et Kuiper : cet indice au point x n'est autre que le nombre maximum de directions linéairement indépendantes en x, suivant lesquelles le basculement de V est nul (cf. I.1.7).

Nous étudions ensuite plus avant les sous-variétés isobasculantes. Nous avons vu dans [Ma.1] qu'il en existe de nombreux exemples.

Les sous-variétés ombilicales sont automatiquement isobasclantes, mais la réciproque est très loin d'être vraie. C'est dans le cas de la codimension 1 que les deux notions sont les plus proches.

Nous établissons en (I.1.18) qu'une hypersurface isobasculante compacte , connexe, de dimension $\geqslant 2$, d'un espace euclidien E est nécessairement une hypersphère de E. Toutefois une hypersurface isobasculante d'une sphère n'est pas forcément ombilicale (cf. I.1.11 et 1.14).

Lorsqu'on étudie les rapports entre les deux notions d'hypersurfaces isobasculantes et d'hypersurfaces ombilicales on rencontre la question suivante : A quelles conditions, dans une variété $\tilde{V}$, toute hypersurface compacte possède-t-elle au moins un point de convexité ? Nous avons cherché à voir dans quelle mesure le raisonnement classique dans $\mathbb{R}^n$, consistant à enserrer V dans des sphères, se généralisait (cf. I.2.7 et 2.9).

Ensuite, ayant défini le **tangage de V suivant un vecteur** de façon naturelle, nous avons étudié les rapports entre courbures, tangages, basculements et diamètres extrinsèques. L'outil de base est le lemme (I.3.1) et son complément (I.3.7).

Mentionnons l'application aux sous-variétés minimales de $\mathbb{R}^n$ (I.3.3) et la caractérisation d'une sphère (I.3.8).

L'étude des rapports entre basculements et transport parallèle nous permet d'énoncer en particulier une propriété des surfaces minimales à bord de $\mathbb{R}^n$, qui relie l'intégrale de la racine carrée du module de la courbure de Gauss sur le bord à l'intégrale de la courbure de Gauss sur la variété (cf.I.4.8).

Le chapitre I se termine par une comparaison de la courbure de Gauss-Bonnet d'une sous-variété de dimension paire de $\mathbb{R}^n$ avec sa courbure aréolaire det β, (cf. I.5.4).

L'intégrale de la courbure aréolaire dépend de la topologie de V : à un facteur près ne dépendant que de la dimension et de la codimension de V, elle est minorée par la somme des nombres de Betti de V (cf. I.5.5).

II. Dans le chapitre II la notion de **roulis** d'une sous-variété V suivant un vecteur tangent à V est définie et étudiée. Le roulis est un invariant conforme.

Si V est une hypersurface de $\tilde{V}$, et si $x \in V$ et $u \in (T_x V) \setminus \{0\}$, pour que $\mathbb{R}u$ soit une direction principale de V il faut et il suffit que le roulis de V suivant u soit nul.

Ceci, ainsi que d'autres raisons, conduit à appeler **direction de courbure** d'une sous-variété V de $\tilde{V}$ toute droite $\mathbb{R}u$, $u \in (T_x V) \setminus \{0\}$, telle que le roulis de V suivant u soit nul, et **ligne de courbure** de V toute courbe de V dont toutes les tangentes sont des directions de courbure de V. Une direction de courbure est nécessairement une direction de basculement principal.

La définition ci-dessus des lignes de courbure permet d'énoncer un "théorème de Joachimsthal" général (cf. II.3.7). Le fibré normal relativement à $\tilde{V}$ de la ligne de courbure, et sa connexion canonique interviennent de façon essentielle.

Pour qu'une sous-variété V de $\tilde{V}$ soit ombilicale il faut et il suffit que tous les roulis de V soient nuls. (Cet énoncé est à rapprocher du suivant : pour qu'une sous-variété V de $\tilde{V}$ soit totalement géodésique il faut et il suffit que tous ses basculements soient nuls.)

Il en résulte en particulier que si V_1 et V_2 sont deux sous-variétés ombilicales de $\tilde{V}$ telles que :

i) $\dim V_1 + \dim V_2 > \dim \tilde{V}$,
ii) $V_1 \cap V_2$ est connexe,
iii) V_1 et V_2 sont transverses en un point $x_o \in V_1 \cap V_2$,

alors $V_1 \cap V_2$ est une sous-variété ombilicale et de plus V_1 et V_2 se coupent suivant un angle constant (cf. II.3.8 et 3.9).

Des formules relatives aux roulis ou aux basculements d'une intersection sont établies.

On montre que le basculement $\| \beta(u) \|$ n'est autre que la norme euclidienne d'une **"rotation instantanée"** $\hat{g}_u$ (cf. II.4.5). L'endomorphisme $\hat{g}$ se décompose canoniquement en une somme de deux éléments orthogonaux dont les normes euclidiennes ne sont autres que le tangange de V suivant u et le roulis de V suivant u.

Lorsque $\tilde{V}$ est conformément plate, pour qu'une sous-variété V de dimension p

de $\tilde{V}$ ait une connexion normale plate, il faut et il suffit qu'en chaque point de V il existe p directions linéairement indépendantes suivant lesquelles le roulis de V est nul (cf. II.6.6).

Le carré du basculement est égal à la somme du carré du tangage et du carré du roulis, mais tangage et roulis ne sont pas indépendants et ne se comportent pas de façon symétrique. Par exemple, d'une majoration au point x_o des tangages suivant les vecteurs unitaires, on déduit une majoration des roulis suivant ces mêmes vecteurs (cf. II.7.1), mais la réciproque est fausse, comme le montre le cas d'une sphère euclidienne dans $\mathbb{R}^n$.

Cette réciproque devient vraie quand on se limite aux sous-variétés minimales (cf. II.7.3).

III. Dans le chapitre III, nous définissons et étudions pour les sous-variétés de $\mathbb{R}^n$ des objets qui, lorsque V est une courbe, sont les axes et les centres de courbure de V.

Si V est une sous-variété de $\mathbb{R}^n$ et $u \in T_xV$, on définit un champ de Killing X_u sur $\mathbb{R}^n$ qui donne naissance à un sous-espace affine $\mathscr{C}_u$, appelé **espace central** et à un vecteur de $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{T}_u$, **la translation instantanée.**

Un point privilégié est aussi considéré : la projection orthogonale H_u de x sur $\mathscr{C}_u$. Il s'avère que H_u-x est orthogonal à V (cf. III.2.2).

Nous sommes conduits de façon naturelle à la définition de la non-dégénérescence d'un élément u de TV (cf. III.3.3). La non-dégénérescence est le cas général. Par exemple lorsque V est une courbe, pour que $u \in T_xV$ soit non dégénéré il faut et il suffit que u et la courbure de V au point x soient non nuls.

Les cas particuliers des courbes et hypersurfaces réelles ou complexes sont examinés (III.3.7 et 3.8).

Les vecteurs u pour lesquels la rotation instantanée g_u est nulle sont évidemment dégénérés.

Diverses caractérisations de ces vecteurs sont données.

Nous étudions ensuite les vecteurs u pour lesquels la translation instantanée