MÉMOIRES DE LA S. M. F.

MARGUERITE-MARIE VIROTTE-DUCHARME

Une construction du groupe de Fischer $Fi(24)$

Mémoires de la S. M. F. 2e série, tome 27 (1987)

<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1987_2_27__1_0>

© Mémoires de la S. M. F., 1987, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mémoires de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Memoires/Presentation.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Mémoire de la Société Mathématique de France, n°27
Supplément au Bulletin de la S.M.F.
Tome 115, 1987, fascicule 2

UNE CONSTRUCTION DU GROUPE DE FISCHER Fi(24)

PAR

MARGUERITE-MARIE VIROTTE-DUCHARME (*)

RÉSUMÉ. — A tout graphe ε d'un certain type — type $\mathcal{F}$ — on sait associer un groupe G presque simple (i.e. $\mathcal{D}(G/Z(G))$ est simple non abélien) admettant comme classe de Fischer l'ensemble des sommets D de ε. On a alors $G = \langle D \rangle$ et ε est le graphe de Fischer de G.

C'est en étendant le graphe de Fischer de Fi(23) que l'on construit celui de Fi(24). On définit le graphe associé à un «quadruple» (ensemble de données incluant celle du graphe que l'on cherche à étendre) et on donne des conditions nécessaires pour qu'un tel graphe soit de type $\mathcal{F}$ (conditions EXT.) et pour que le groupe associé soit unique à isomorphisme près (conditions U.).

A partir d'un sous-groupe maximal de Fi(23) et de Fi(23) lui-même, on exhibe un quadruple satisfaisant aux conditions EXT. et U. ce qui donne l'existence et l'unicité (à isomorphisme près) du groupe de Fischer Fi(24).

ABSTRACT. — To all graph ε of a certain type — type $\mathcal{F}$ — we know how to associate an almost simple group G (i.e. $\mathcal{D}(G/Z(G))$ is simple and non abelian) for which the set of vertices D of ε is a Fischer class. So we have $G = \langle D \rangle$ and ε is the Fischer graph of G.

By extending the Fischer graph of Fi(23) we construct the graph of Fi(24). We define the graph associated to a «quadruple» (set of data including that of the graph we are going to extend) and we set necessary conditions so that such a graph be of type $\mathcal{F}$ (conditions EXT.) and its associated group be unique up to isomorphism (conditions U.).

From a maximal subgroup of Fi(23) and from Fi(23) itself we construct a quadruple satisfying the conditions EXT. and U.; in this way the existence and uniqueness (up to isomorphism) of the Ficher groupe Fi(24) are established.

(*) Texte reçu le 18 novembre 1985, révisé le 25 juin 1987.

0037-9484/87 02 1-74 $ 9.40 © Gauthier-Villars

TABLE DES MATIÈRES

page

Introduction 3

Première partie - Axiomatique 5

§1.- Graphes de type $\mathcal{T}$. Couples fischériens presque simples 6
1. Notations. Définitions 6
2. Équivalence entre graphe de type $\mathcal{T}$ et couple fischérien presque simple. Énoncé du théorème 8
3. Préliminaires nécessaires à la démonstration 9
4. Preuve du théorème 10

§2.- Graphe associé à un quadruple. Théorème principal 12
1. Définition 12
2. Énoncé des conditions EXT. et du théorème principal 13
3. Preuve du théorème 15

§3.- Principe d'extension de graphes 23
1. Définitions 23
2. Exemples 25

§4.- Prolongement de certains isomorphismes.Théorème d'unicité 28
1. Notations. Enoncé des conditions U. 28
2. Énoncé des résultats.Théorème d'unicité 32
3. Preuve du théorème de prolongement 32

Seconde partie - Existence de Fi(24) 49

§1. Notations complémentaires. Rappels 50
1. Couples fischériens (G^i, D^i) 50
2. Groupes R^i et B^i 50
3. Groupes K^i 51
4. Résultats numériques 52

§2. Énoncé du théorème-Principe de la démonstration 54

§3. Démonstration du théorème 56
1. Détermination d'un quadruple satisfaisant à EXT.i ($i \neq 3$) 56
2. La condition EXT.3 60
3. Existence de Fi(24) 66
4. Unicité de Fi(24) 66

Appendice 69

Bibliographie 73

UNE CONSTRUCTION DU GROUPE DE FISCHER Fi(24)

INTRODUCTION

Une *classe de Fischer* (ou classe fischérienne) d'un groupe G est une classe de conjugaison D d'involutions telle que le produit de deux éléments quelconques de D soit d'ordre au plus 3; on dit alors que (G,D) est un couple fischérien. L'exemple typique est celui des transpositions dans le groupe symétrique . Ayant eu l'idée de caractériser les groupes symétriques par l'existence d'une telle classe, B.Fischer a été amené à déterminer tous les groupes finis " presque simples " (définition ci-dessous I.§1.1.(b)) de centre trivial possèdant une classe fischérienne et il a de la sorte découvert les trois groupes sporadiques qui portent son nom (Fi(22),Fi(23),$\mathcal{D}$Fi(24)). Ces résultats sont exposés dans une prépublication [F_2] dont seuls les quatre premiers chapitres ont fait l'objet d'un version définitive [F_1]. En outre, les principes généraux permettant d'obtenir l'existence de couples fischériens presque simples, notamment celle de Fi(24) ([F_2]. ch19), sont exposés de manière très succinte et parfois imprécise, ce qui , sans compromettre l'exactitude du résultat final, reste très génant pour se convaincre de l'existence de Fi(24). On dispose, il est vrai, d'un autre moyen de prouver cette existence qui passe par la construction préalable du " Monstre " ([Gr]p.86). Mais outre que cette preuve n'est qu'implicite dans la littérature, elle donne sur les groupes Fi un éclairage tout différent de celui fourni par l'approche de Fischer . Il est apparu intéressant de publier une démonstration de l'existence de Fi(24) dans *l'esprit* de Fischer. C'est le but principal de cet article.

Au cours de ce travail, nous sommes amenés à axiomatiser, en les généralisant, certains procédés de construction de Fischer. L'axiomatique en question, exposée dans la premiere partie, s'applique à l'ensemble du travail de Fischer (y compris les preuves d'existence de Fi(22) et Fi(23)).

Cet article est une refonte d'une partie de la thèse de Doctorat de l'auteur.

Je tiens à remercier Jacques Tits pour sa lecture minutieuse du manuscrit et pour ses nombreux conseils qui ont contribué, entre autres, à en améliorer la rédaction.

UNE CONSTRUCTION DU GROUPE DE FISCHER Fi(24)

Première partie: AXIOMATIQUE

A tout couple fischérien (G,D) est associé un graphe $\mathcal{G}$ dont les sommets sont les éléments de D et dont les arêtes sont les paires d'éléments distincts qui commutent. Parfois le graphe $\mathcal{G}$ détermine le couple (G,D) ; c'est le cas, notamment, lorsque le groupe G est presque simple de centre trivial. Dans le premier paragraphe, nous donnons des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un graphe $\mathcal{G}$ soit associé à un couple fischérien presque simple; nous disons alors que $\mathcal{G}$ est de type $\mathcal{F}$.

La méthode suivie par Fischer est essentiellement inductive. Cela se traduit ici par le concept d'extension de graphes; il s'agit, à partir du graphe d'un couple fischérien non nécessairement presque simple et de quelques données supplémentaires, de construire un graphe "plus gros", extension du premier et de démontrer qu'il est de type $\mathcal{F}$. Cela fait l'objet des paragraphes 2 et 3 .Au paragraphe 2, nous étudions une situation plus générale et plus "abstraite" : à un ensemble de données - un "quadruple" - est associé un graphe et notre théorème principal donne des conditions suffisantes (les conditions EXT) pour que ce graphe soit de type $\mathcal{F}$. Nous spécialisons ce résultat au paragraphe 3, où sont introduites les q-extensions, pour un entier q égal à 1 , 2 ou 3 (reflétant les situations les plus importantes rencontrées dans la pratique) et où divers exemples de telles extensions sont donnés.

Enfin au paragraphe 4, nous montrons que sous certaines conditions (les conditions U), un isomorphisme entre graphes se prolonge de façon unique à des 2-extensions de ceux-ci. Ce résultat sera utile non seulement pour établir l'unicité du groupe Fi(24) mais encore pour prouver son existence.

§1. GRAPHES DE TYPE $\mathcal{F}$ - COUPLES FISCHÉRIENS PRESQUE SIMPLES

1. Notations. Définitions.

(a) Soit D un ensemble d'involutions d'un groupe fini G engendrant G tel que l'ordre du produit de deux éléments quelconques soit au plus 3.

Si D est une réunion $\cup_{1\leq i\leq m} D_i$ de classes de conjugaison, on dit que D est un <u>ensemble de Fischer</u> de G; le groupe G est alors le produit central des sous-groupes $\langle D_i \rangle$ $(1\leq i\leq m)$.

Si D est une seule classe, on dit que D est <u>une classe de Fischer</u> de G et que (G,D) est un <u>couple fischérien</u>.

On démontre facilement que, si D est un ensemble de Fischer fini de G, G est un groupe fini; on fera ,ici, toujours l'hypothèse que D est fini.

(b) Lorsque le groupe dérivé $\mathcal{D}(G/Z(G))$ du quotient de G par son centre est simple non abélien, on dit que G est un groupe <u>presque simple</u>.

On démontre aisément que si (G,D) est un couple fischérien avec $|G|>2$, le centre de G/Z(G) est trivial et que les assertions "est une classe de Fischer" et "est presque simple" passent au quotient modulo Z(G). En particulier, D est en bijection avec son image modulo Z(G).

(c) <u>Graphe de Fischer</u>. Soit G un groupe possédant un ensemble de Fischer D (D fini). Le groupe G opère de manière naturelle sur le graphe défini de la manière suivante:

- les sommets de $\mathcal{G}$ sont les éléments de D,
- les arêtes de $\mathcal{G}$ sont les paires d'éléments (distincts) de D dont le produit est d'ordre 2 .

On dit que $\mathcal{G}$ est le <u>graphe de Fischer</u> de (G,D).

Lorsque $D\cap Z(G)=\emptyset$, en particulier lorsque D est une classe de Fischer de G

et que l'on a $|G|>2$, D est isomorphe à son image $\overline{D}$ modulo Z(G), on identifie le graphe de Fischer de (G,D) et celui de $(G/Z(G),\overline{D})$.

La décomposition de D en classes de conjugaison correspond à la partition de $\mathcal{G}$ en composantes anti-connexes (composantes connexes du graphe opposé). Le graphe de Fischer d'un couple fischérien est donc anti-connexe.

(d) D-sous-groupe. Un sous-groupe d'un groupe G possédant un ensemble de Fischer D est un D-sous-groupe de G s'il est engendré par un sous-ensemble de D . Il est clair que si H est un D-sous-groupe de G, $H\cap D$ est un ensemble de Fischer de H.

(e) Soit D un ensemble de Fischer d'un groupe G. Pour tout élément d de D, on pose:

$$D_d = \{ e\in D \mid 1\neq ed=de \}$$
$$A_d = \{ x\in D \mid xd\neq dx \}$$

on a :

$$D = D_d \cup \{d\} \cup A_d .$$

(f) Soient $\mathcal{E}$ un graphe, E l'ensemble de ses sommets.On appelle triple de $\mathcal{E}$ tout sous-ensemble T de cardinal 3 ne contenant aucune arête, tel que tout sommet de $\mathcal{E}$ lié à deux points de T est lié à tous les autres points de T.

On dit que $\mathcal{E}$ est de type $\mathcal{T}$ si les conditions suivantes sont remplies:

(1) le cardinal de E est au moins égal à 4;

(2) la composante anti-connexe de chaque sommet est de cardinal au moins égal à 2;

(3) chaque paire de sommets non liés de $\mathcal{E}$ est contenue dans un unique triple;

(4) pour tout sommet e de $\mathcal{E}$ la fonction $x \mapsto t_e(x)$ où $t_e(x)=x$ si $\{e,x\}$ est une arête de $\mathcal{E}$ ou si $e=x$, et où $\{e,x,t_e(x)\}$ est l'unique triple de $\mathcal{E}$ contenant $\{e,x\}$ dans le cas contraire, est un automorphisme de $\mathcal{E}$.

La fonction $x \mapsto t_e(x)$ s'appelle l'indicatrice du sommet e. Pour tout sommet e de $\mathcal{E}$, on désigne par E_e l'ensemble des sommets de $\mathcal{E}$ qui sont liés à e ; on a donc

$$E_e = \{ f\in E \mid \{e,f\} \text{ est une arête de } \mathcal{E} \} .$$

Remarque. Soient (G,D) un couple fischérien et $\mathcal{G}$ son graphe de Fischer . Toute paire $\{d,x\}$ d'éléments de D qui ne commutent pas entre eux, détermine un triple $T = \{d,x,dxd\}$. Si pour chaque paire $\{d,x\}$ avec $dx\neq xd$, on impose que

$\{d,x,xdx\}$ soit l'unique triple contenant $\{d,x\}$, l'application $d \mapsto xdx$ est l'indicatrice de x ($x \in A_d$) : c'est un automorphisme de $\mathcal{G}$.

Dans toute la suite, nous appellerons sous-graphe d'un graphe $\mathcal{G}$ porté par un sous-ensemble E' de l'ensemble des sommets de $\mathcal{G}$ le sous-graphe plein porté par E'.

2. Équivalence entre graphe de type $\mathcal{F}$ et couple fischérien presque simple. Énoncé du théorème.

Le théorème suivant établit le lien qui existe entre "groupe presque simple" et "graphe de type $\mathcal{F}$". De manière précise, il montre que prouver qu'un couple fischérien est presque simple c'est prouver que son graphe de Fischer est de type $\mathcal{F}$. En outre, il montre qu'à chaque graphe de type $\mathcal{F}$ est associé un couple fischérien presque simple.

C'est d'ailleurs en construisant un graphe de type $\mathcal{F}$ que nous donnerons une preuve de l'existence de Fi(24).

THÉORÈME I.1. -

(a) Le graphe d'un couple fischérien presque simple est de type $\mathcal{F}$.

(b) Soit $\mathcal{E}$ un graphe de type $\mathcal{F}$. Soient D l'ensemble des indicatrices de $\mathcal{E}$ et G le sous-groupe de Aut($\mathcal{E}$) engendré par D. L'ensemble D est un ensemble de Fischer de G. Si $\mathcal{E}$ est anti-connexe, (G,D) est un couple fischérien presque simple de centre trivial. Le graphe de Fischer de (G,D) est isomorphe à $\mathcal{E}$.

La démonstration de (a) fait appel à la connaissance de certains couples fischériens classiques - ceux pour lesquels $\langle D_d\rangle/Z(\langle D_d\rangle)$ ($d \in D$) n'est pas presque simple -. Toutefois, on peut caractériser les graphes de type $\mathcal{F}$ en n'utilisant que des résultats issus de l'étude générale des couples fischériens.

PROPOSITION I.1. - Soient (G,D) un couple fischérien et $\mathcal{G}$ son graphe. Les conditions ci-après sont nécessaires et suffisantes pour que $\mathcal{G}$ soit de type $\mathcal{F}$.

(i) $|G|>2$ et $\mathcal{O}_3(G)$ est central dans G .

(ii) Si x et y sont des éléments de D qui ne commutent pas entre eux, les seuls éléments de D centralisant $D_x \cap D_y$ et n'appartenant pas à $D_x \cap D_y$

sont x, y, x^y .
(Réf. [F_2] 10.3 ;[VD] 2-106).

3. Préliminaires nécessaires à la démonstration.

(a) Soit (G,D) un couple fischérien non résoluble; G admet un D-sous-groupe isomorphe à Σ_5 (Réf. [F_2] 5.1.1 ; [VD] 2-97).

(b) Sur la presque simplicité. Soit (G,D) un couple fischérien.

1- Les assertions suivantes sont équivalentes:

(i) D est un G-ensemble primitif de cardinal au moins égal à 4,

(ii) G est presque simple;

en outre, sous l'une des conditions ci-dessus, le graphe de (G,D) est connexe.

2- Soit d un élément de D. Si G est presque simple, on a:

(i) D_d est une classe de Fischer de $\langle D_d \rangle$ et $\langle D_d, d \rangle$ opère transitivement sur le sous-ensemble $A_d = \{e \in D \mid ed \neq de\}$; en particulier, les sous-groupes $\langle D_d \cap D_x \rangle$ $(x \in A_d)$ sont conjugués dans $\langle D_d \rangle$;

(ii) si $\mathbb{O}_2(\langle D_d \rangle)$ et $\mathbb{O}_3(\langle D_d \rangle)$ sont centraux, $(\langle D_d \rangle, D_d)$ est presque simple.

(Réf. [F_1] 3.2.2, 3.3.3, 3.3.4 ; [VD] 2-82, 2-89, 2-90, 2-93).

(c) Sur le centre de $\langle D_d \rangle$.

1- On appelle niveau d'un couple fischérien (G,D) le cardinal commun des sous-ensembles minimaux d'une clique de D dont le produit des éléments est 1. Si de tels sous-ensembles n'existent pas, on dit que (G,D) est de niveau nul.

Si (G,D) est un couple fischérien de niveau non nul, quel que soit l'élément d dans D, d appartient à $\langle D_d \rangle$, donc il est dans le centre de $\langle D_d \rangle$.

(Réf. [VD] 3-1-3 c).

2- Soit $\mathcal{E}$ un graphe anti-connexe de type $\mathcal{F}$, E l'ensemble de ses sommets, e un élément de E et ν un automorphisme de $\mathcal{E}$ qui induit l'identité sur l'ensemble des sommets de $\mathcal{E}$ liés à e . Alors ou bien ν est l'identité sur E, ou bien ν est l'indicatrice de sommet e.

(Réf. [F_2] 10.5 (iii) ; [VD] 2-109).

3- Soit (G,D) un couple fischérien dont le graphe est de type $\mathcal{F}$. Pour tout élément d de D, le centre de $\langle D_d \rangle$ est ou bien trivial ou bien égal à $\langle d \rangle$.

(Réf. [VD] 2-110).