MÉMOIRES DE LA S. M. F.

FRANÇOIS LALONDE

Homologie de Shih d'une submersion (homologies non singulières des variétés feuilletées)

Mémoires de la S. M. F. 2e série, tome 30 (1987)

<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1987_2_30__1_0>

© Mémoires de la S. M. F., 1987, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mémoires de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Memoires/Presentation.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

INTRODUCTION

ÉNONCÉ DES RÉSULTATS.

Shih a introduit en [10], pour l'étude des sections d'une application différentiable $f : X_2 \to X_1$ où X_1 et X_2 sont des variétés lisses de classe C^∞, une nouvelle "homologie", appelée homologie sectionnelle, permettant d'attacher à f des invariants algébriques (du type différentiable de f) tenant compte de la topologie des singularités de l'application. Cette homologie conduit également à définir, lorsque X_1 est connexe et orientée, un invariant numérique, appelé degré sectionnel, déterminant une obstruction plus fine que le degré classique à l'existence d'une section de f (voir [11] et [5]).

Soit le diagramme commutatif, noté $(f,f_0;g)_k$:

$$\begin{tikzcd} Y_2 \arrow[r, "g_2"] \arrow[d, "f_0"'] & X_2 \arrow[d, "f"] \\ Y_1 \arrow[r, "g_1"] & X_1 \end{tikzcd}$$

d'applications différentiables de classe C^k $(1 \leq k \leq \infty)$ entre variétés lisses, où g_1 est un plongement. Pour étudier les sections de classe C^k de f prolongeant des sections données de f_0, on définit de manière fonctorielle les groupes d'homologie sectionnelle k-fois différentiable absolue et relative $H_*(f)_k$ et $H_*(f,f_0;g)_k$. Cette homologie s'obtient à partir du complexe des chaînes finies de simplexes sectionnels k-fois différentiables a coefficients entiers, un simplexe sectionnel k-fois différentiable étant une section locale de classe C^k de f au-dessus d'un simplexe k-fois différentiable plongé.

Le principal objet de ce travail est d'établir le résultat fondamental sur l'homologie de Shih :

THÉORÈME S. Il existe un morphisme canonique $(p_2)_* : H_*(f)_k \to H_*(X_2)$ qui, pour toute submersion f, est un isomorphisme en dimensions $* < n = \dim X_1$ et une surjection pour $* = n$.

On en déduira (voir p. 15) que pour un feuilletage $(V,\mathfrak{F})$ régulier d'une variété lisse V, c'est-à-dire un feuilletage donné par des submersions locales, les q-chaînes singulières de V sont représentables par les q-chaînes de simplexes plongés transverses à $\mathfrak{F}$, pour tout $q \leq n = \operatorname{codim} \mathfrak{F}$.

Le théorème S exprime que l'homologie sectionnelle d'une application f n'est sensible qu'aux singularités de f, c'est-à-dire ne diffère de l'homologie ordinaire de l'espace source que si f présente des singularités. Et effectivement, l'homologie sectionnelle d'un fibré à singularités (et à plus forte raison celle des applications différentiables moins régulières) est bien différente de l'homologie singulière de l'espace source (voir [5], chap. I).

L'étude de l'homologie sectionnelle suppose, comme préalable, celle de l'homologie des chaînes de simplexes k-fois différentiables plongés d'une variété lisse V, appelée homologie de plongements k-fois différentiables de V : la première se réduit à la seconde quand $f = 1_V$. Désignons par $C(V)$ le complexe des chaînes finies de simplexes singuliers de V à coefficients entiers, et par $C(V)_{Pk}$ le sous-complexe de $C(V)$ librement engendré par le sous-ensemble simplicial $S(V)_{Pk} \subset S(V)$ des simplexes k-fois différentiables plongés $(1 \leq k \leq \infty)$. Soit également $p \geq 1$ et désignons par $\operatorname{supp} : V_p(TV) \to V$ la projection canonique sur V de la variété de Stiefel des p-repères. Notons $S_q^{(p)}(V)_{Pk}$ l'ensemble des couples $(\lambda, \varphi = (\varphi^1, \ldots, \varphi^p))$, où $\lambda \in S_q(V)_{Pk}$, et $\varphi \in S_q(V_p(TV))_{Pk}$, tels que $\operatorname{supp} \circ \varphi = \lambda$ et $\dim [\operatorname{Im} D\lambda(x), \varphi(x)] = q + p$ quel que soit $x \in \Delta_q$ (les crochets désignent l'espace vectoriel engendré). Les opérateurs de face naturels font de $S^{(p)}(V)_{Pk}$ un ensemble simplicial dont l'homologie $H_*^{(p)}(V)_{Pk}$ est appelée <u>homologie des p-champs transverses de V</u>. On montrera que :

THÉORÈME P. <u>Quel que soit</u> $1 \leq k \leq \infty$, <u>l'inclusion</u> $\iota : C(V)_{Pk} \hookrightarrow C(V)$ <u>induit, en homologie, un isomorphisme pour</u> $q \neq n = \dim V$ <u>et une surjection pour</u> $q = n$.

et que les définitions qui précèdent conduisent à une bonne théorie des champs transverses.

THÉORÈME CT (champs transverses). Quels que soient $p \geq 1$ et $1 \leq k \leq \infty$, le morphisme

$$\begin{aligned} \mathrm{supp} : S_q^{(p)}(V)_{Pk} &\longrightarrow S_q(V)_{Pk} \\ (\lambda, \varphi) &\longmapsto \lambda \end{aligned}$$

induit en homologie un isomorphisme pour $q < n-p$ et une surjection pour $q = n-p$.

On en déduit, en particulier, que tout q-cycle singulier de V $(q \leq n-p)$ est homologue à un cycle plongé "admettant" un p-champ transverse dans V.

Ces deux résultats (théorèmes P et CT) sont liés : nous allons utiliser le second dans la démonstration du premier.

APERCU DES DÉMONSTRATIONS ET SOMMAIRE DE L'ARTICLE.

Pour établir le théorème P et en particulier l'injectivité de $i_* : H_*(V)_{Pk} \to H_*(V)$, considérons un q-cycle z de simplexes plongés de V bordant une chaîne c de simplexes singuliers que l'on peut supposer de classe C^k (voir [2] ou [4]). Pour montrer qu'il borde également une chaîne de simplexes plongés, on pourrait d'abord mettre la chaîne c en position générale de manière à ce que le lieu singulier de chaque simplexe de c soit de codimension maximale, et subdiviser ensuite chaque simplexe suivant une stratification du lieu singulier. Ceci donnerait lieu à une chaîne c', subdivision de c, constituée de simplexes sans singularités. Mais même dans le cas générique, le lieu singulier pourra rencontrer le bord z de la chaîne et l'on aurait au plus établi qu'il existe une subdivision de z qui borde une chaîne de simplexes plongés. Il resterait encore à montrer l'invariance par subdivision de l'hom ologie de plongements.

Effectivement, la difficulté principale dans la démonstration du théorème P consiste à établir l'invariance par subdivision linéaire (ISL) (voir définition 1.2) -et en particulier l'invariance par subdivision barycentrique- de l'homologie de plongements. En homologie singulière comme en homologie

différentiable , l'homotopie classique entre l'identité et tout morphisme de subdivision est "écrasée" sur le support des simplexes considérés. Pour s'assurer l'existence d'une homologie plongée entre un cycle plongé z et l'une de ses subdivisions, on se donne d'abord, pour chaque simplexe $\sigma \in z$, une section non-nulle du fibré normal trivial sur $\mathrm{Im}\,\sigma$, c'est-à-dire un 1-champ transverse sur σ. Dès que la subdivision χz du cycle z ne subdivise pas seulement l'intérieur des simplexes mais également leurs faces, la chaîne $\sigma - \chi\sigma$ n'est pas un cycle, et le 1-champ transverse sur σ donne une $(q+1)$-chaîne plongée $\Omega(\sigma)$ (obtenue après s'être donné une connexion riemannienne sur V) telle que : $\partial\Omega(\sigma) = \sigma - \chi\sigma - R$ où le reste $R = \Omega(\partial\sigma)$.

La définition d'un tel opérateur d'homotopie sur $S(z)$ n'est possible qu'à condition de pouvoir recoller les champs transverses provenant des hyperfaces de simplexes contigus de z . Or, même lorsque z réalise une triangulation d'une sous-variété W de V , il n'existe pas nécessairement de sous-fibré de dimension 1 du fibré normal de W dans V . A fortiori, si z est un q-cycle de $\mathbb{R}^{q+1}$ contenant deux simplexes plongés σ et σ' s'enroulant autour de leur $(q-1)$-face commune λ :

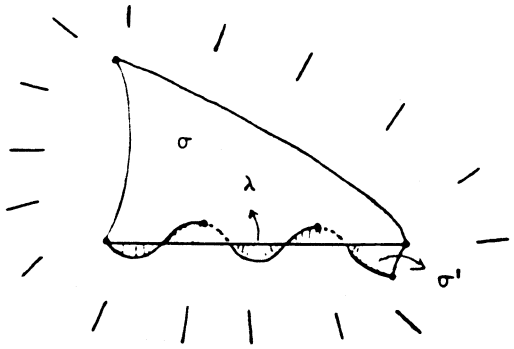

Figure 1

il ne sera pas possible de trouver deux champs transverses ψ sur σ et ψ' sur σ' qui coïncident sur λ .

On surmonte cette difficulté en montrant que la chaîne de simplexes de 1-champs transverses : $(\lambda,\varphi) - (\lambda,\varphi')$, où φ (resp. φ') est le champ transverse sur λ hérité du champ ψ (resp. ψ') est un bord en homologie de 1-champs transverses à supports algébriquement nuls (voici l'illustration, en dimension 0 , de cette homologie entre (λ,φ) et (λ,φ') :

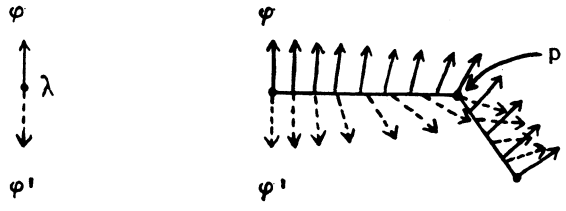

Figure 2

où la singularité en p permet de faire coïncider les deux champs sans rompre la transversalité).

La démonstration de l'invariance par subdivision linéaire de l'homologie de 1-champs transverses à supports algébriquement nuls conduit à son tour à introduire une homologie de 2-champs transverses, et ainsi de suite. Le problème de l'invariance par subdivision linéaire des cycles plongés est donc lié à celui du calcul des homologies de p-champs transverses (dont la (n+1)-ème est triviale).

Ceci est la version "plongements" d'une situation "sectionnelle", plus générale, qui s'énonce de la même manière. On définit l'<u>homologie des p-champs sectionnels transverses</u> d'une application différentiable $f : X_2 \to X_1$, notée $H_*^{(p)}(f)_k$, comme l'homologie des simplexes $s = (\lambda,\varphi) \in S^{(p)}(X_2)_{Pk}$ dont l'image par Df est un simplexe de $S^{(p)}(X_1)_{Pk}$. Le problème de l'invariance par subdivision linéaire des cycles sectionnels d'une submersion (et par conséquent, la démonstration du théorème S) dépend du calcul des homologies de p-champs sectionnels transverses. On retrouve la version "plongements" en posant $f = 1_V$; il nous suffira donc de considérer le cas sectionnel.

On procède de la façon suivante. On donne, au §1, la définition de l'homologie sectionnelle et de l'homologie des champs sectionnels transverses, ainsi que celle de subdivision linéaire.

On construit ensuite, au §2, la suite exacte des complexes de champs sectionnels transverses, dont il résulte que pour une submersion $f : X_2 \to X_1$:

$$\bar{H}^{(p+1)}_{*<n-(p+1)}(f)_k = 0 \implies \bar{H}^{(p)}_{*<n-p}(f)_k \text{ ISL} \qquad (1)$$

quel que soit $p \geq 0$. Ici $\bar{H}^{(p)}(f)_k$ est l'homologie du sous-complexe $\bar{C}^{(p)}(f)_k \subset C^{(p)}(f)_k$ défini par : $c \in \bar{C}^{(p)}(f)_k \Leftrightarrow \pi_j(c) = 0$ pour tout $1 \leq j \leq p$, où $\pi_j : S^{(p)}(f)_k \to S^{(p-1)}(f)_k$ est le morphisme éliminant le j-ème champ de vecteurs (on pose $H^{(0)}(f)_k = \bar{H}^{(0)}(f)_k = H(f)_k$). (On observera que $\bar{H}^{(1)}(1_V)_k = \bar{H}^{(1)}(V)_{Pk}$ est l'homologie de 1-champs transverses à supports algébriquement nuls mentionnée plus haut.) La démonstration de tous les résultats se réduit donc à celle des deux implications suivantes :

$$\bar{H}^{(p)}_{*<n-p}(f)_k \text{ ISL} \implies \bar{H}^{(p)}_{*<n-p}(f)_k = 0 \quad \text{pour tout } p \geq 1 \qquad (2)$$

et $$H_{*<n}(f)_k \text{ ISL} \implies p_2 : H_q(f)_k \to H_q(X_2) \text{ est un isomorphisme} \qquad (3)$$
pour $q < n$ et une surjection pour $q = n$.

En effet, il résulte de (1) et (2) que $\bar{H}^{(p)}_{*<n-p}(f)_k = 0$ pour tout $p \geq 1$, et que $H_{*<n}(f)_k$ est ISL. L'implication (3) donne alors le théorème S (et P), tandis que le théorème CT se déduit aisément de la nullité des homologies tronquées $\bar{H}^{(p)}_{*<n-p}(V)_{Pk}$ $(p \geq 1)$.

Il reste à établir les implications (2) et (3) dans lesquelles l'invariance par subdivision linéaire est maintenant donnée. On les établit d'abord, au §3, dans le cas $f = 1_{\mathbb{R}^n}$. Elles s'écrivent alors :

$$\bar{H}^{(p)}_{*\neq n-p}(\mathbb{R}^n)_{Pk} \text{ ISL} \implies \bar{H}^{(p)}_{*\neq n-p}(\mathbb{R}^n)_{Pk} = 0 \quad \text{pour tout } p \geq 0 .$$

La démonstration procède en trois étapes :

1) (Lemme 1, § 3) On montre d'abord que tout cycle $z \in \bar{Z}^{(p)}_{q\neq n-p}(\mathbb{R}^n)_{Pk}$ est homologue dans $\bar{C}^{(p)}(\mathbb{R}^n)_{Pk}$, à subdivision linéaire près, à un cycle à supports géodésiques (c'est-à-dire, dans $\mathbb{R}^n$: à supports linéaires affines) non-dégénérés.

2) (Lemme 2, § 3) On établit ensuite que tout cycle $z \in \bar{Z}^{(p)}_{q \neq n-p}(\mathbb{R}^n)_{Pk}$ à supports géodésiques non-dégénérés est homologue, à subdivision linéaire près, à un <u>cycle sans torsion</u> (voir définition 3.1 : un cycle sans torsion est un cycle dont chaque simplexe est constitué d'un support géodésique non-dégénéré portant un champ transverse "plat").

3) (Lemme 3, § 3) On montre enfin que tout cycle sans torsion est un bord de $\bar{C}^{(p)}(\mathbb{R}^n)_{Pk}$.

La troisième étape est la plus simple. L'idée qui dirige sa démonstration se lit sur la figure 2 : on se donne d'abord sans peine une $(q+1)$-chaîne c de p-repères sur supports plongés telle que $\partial c = z$. Cette chaîne n'appartient pas, en général, à $\bar{C}^{(p)}(\mathbb{R}^n)_{Pk}$, les p-repères n'étant pas nécessairement transverses aux supports. On récupère ensuite la transversalité en effectuant un froissement des supports de c (qui correspond à la singularité en p de la figure 2) et en transportant les p-repères de la chaîne initiale sur la chaîne froissée le long d'un feuilletage de $\mathbb{R}^n$ choisi de façon appropriée.

La seconde étape est la plus délicate, la difficulté résidant dans une définition correcte du morphisme "sans torsion". C'est la partie technique de ce travail.

Enfin, la démonstration de la première étape dans le cas le plus simple $p = 0$, s'appuie sur l'observation naïve suivante : toute subdivision suffisamment fine χ d'un cycle plongé z transforme z en un cycle χz "presque linéaire", qui est alors homologue au cycle linéaire $L(\chi z)$ correspondant (L étant le morphisme associant à tout simplexe σ le simplexe linéaire déterminé par les sommets de σ). Ce procédé de démonstration présente deux problèmes assez délicats : le premier est de pouvoir s'assurer que $L(\chi z)$ est un cycle de simplexes non-dégénérés. Dans l'hypothèse où ce problème est réglé, le second consiste à s'assurer que $L(\chi z)$ converge vers χz à mesure

que χ s'affine, la convergence devant avoir lieu dans une topologie qui tienne compte des jets d'ordre 1 des simplexes, puisqu'il s'agit d'homologie de plongements et donc d'immersions.

Voici un exemple d'une suite $(\sigma^i)_{i\in\mathbb{N}}$ de subdivisions d'un 2-simplexe plongé σ de $\mathbb{R}^3$ devenant aussi fine que l'on veut, mais telle que $L(\sigma^i)$ ne converge vers σ^i dans aucune topologie C^1 raisonnable :

Soient S^2 la sphère-unité de $\mathbb{R}^3$, $p' \in S^2$ un point quelconque, et σ le 2-simplexe plongé de $\mathbb{R}^3$ défini comme simplexe géodésique isocèle de S^2 :

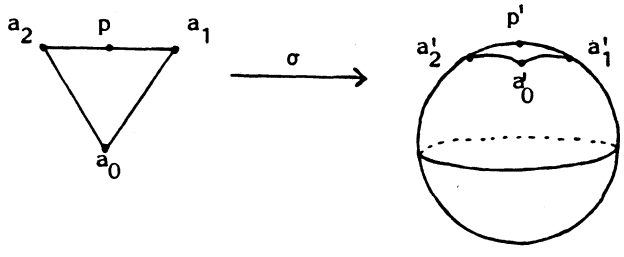

Figure 3

où p est le point milieu de $\overline{a_2a_1}$. Soit maintenant la suite $(\sigma^i)_{i\in\mathbb{N}}$ des composés $\sigma^i = \sigma \circ \beta^i$, où $\beta^i : \Delta_q \hookrightarrow \Delta_q$ est l'application linéaire affine non-dégénérée suivante :

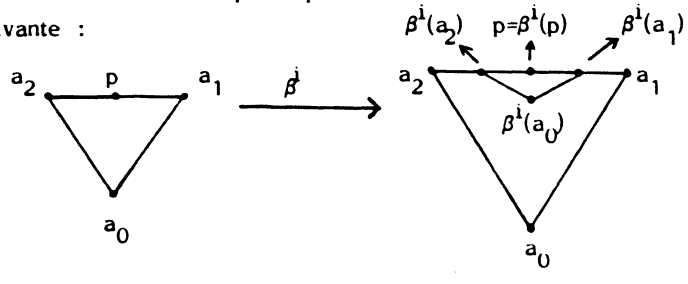

Figure 4

avec $\text{dist}(\beta^i(a_j),p) = \dfrac{\text{dist}(a_j,p)}{i}$ pour $j = 1, 2$, et $\text{dist}(\beta^i(a_0),p) = \dfrac{\text{dist}(a_0,p)}{2^i}$.

La suite $(\text{Im}\,\sigma^i)$ est donc une suite de triangles isocèles de S^2 dont les angles à la base s'écrasent rapidement quand i croît. Alors, $(\sigma^i)_{i\in\mathbb{N}}$ est une suite de simplexes "presque linéaires" de $\mathbb{R}^3$ devenant aussi linéaires que l'on veut pour i suffisamment grand. Mais $T_p\sigma^i = T_{p'}S^2$ pour tout $i \in \mathbb{N}$, d'où :

$$\lim_{i\to\infty} T_p\sigma^i = T_{p'}S^2 ,$$

alors que

$$\lim_{i\to\infty} T_p L(\sigma^i) = P$$

où P est le plan orthogonal à $T_{p'}S^2$ passant par a_2', p' et a_1' (figure3).

Un simplexe "presque linéaire" n'est donc pas nécessairement proche du simplexe linéaire correspondant, et cela dès qu'on considère la proximité au sens C^1. On évite ce genre de difficultés en introduisant deux objets :

- Les suites fines et régulières de subdivisions linéaires des simplexes types, qui permettent de contrôler l'écrasement des angles hypersolides en fonction du rayon, de manière à éviter les comportements indésirables au sens C^1 (voir définition 3.6 et proposition 3.7).

- Une topologie adaptée à ce genre de problèmes, donnée de telle sorte que si σ^i et $L(\sigma^i)$ sont suffisamment proches dans cette topologie, alors :

i) $L(\sigma^i)$ est non-dégénéré ;

et ii) il existe une chaîne plongée réalisant une homotopie entre σ^i et $L(\sigma^i)$.

C'est une topologie, provenant d'une métrique éclatée à l'origine, strictement plus fine que la topologie C^1 de Whitney au voisinage des 1-jets singuliers (voir topologie 0-fine, définition 3.3, proposition 3.4 et lemme 3.8).

Le cas $p = 0$ de l'étape 1 a été établi par J.H.C. Whitehead pour un C^1-complexe non-singulier ([14], théorème 4). Il définit, pour cela, des subdivisions du C^1-complexe, appelées (δ,σ)-subdivisions, semblables aux subdivisions induites par nos suites fines et régulières. De telles subdivisions ont également été définies par Whitney ([15], p. 358-360) et Thurston ([13], §5). La définition de Thurston est proche de la nôtre : elles ont toutes les deux la propriété d'être cristallines. Ces subdivisions ont toutes la même fonction : pour une telle subdivision suffisamment fine d'un simplexe plongé $\lambda : \Delta_q \hookrightarrow V \subset \mathbb{R}^N$, l'enveloppe convexe dans $\mathbb{R}^N$ de tout simplexe $L(\sigma)$ de cette subdivision est un q-plan de $\mathbb{R}^N$ aussi près que l'on veut du plan tangent à σ au barycentre de σ.