Raconte-moi... un groupoïde de Lie

• S. Vassout

1. Introduction

Un groupoïde peut se définir de manière concise de la façon suivante : c'est une petite catégorie dans laquelle tous les morphismes sont inversibles. Cette définition pourrait laisser penser que les groupoïdes sont des objets abstraits dont l'intérêt pratique pour les mathématiciens est limité. En fait, dès leur introduction par Brandt en 1927, il apparait que ces objets mathématiques s'avèrent au contraire d'une grande utilité dans une très grande variété de champs mathématiques. Commençons par en donner une définition plus concrète. On appelle groupoïde G, d'espace des unités $G^{(0)}$, la donnée des ensembles G et $G^{(0)}$ et des applications suivantes :

- $\Delta : G^{(0)} \to G$, l'application d'inclusion des unités (ou diagonale),
- une involution $i : G \to G$ appelée inversion et notée $i(\gamma) = \gamma^{-1}$,
- des applications source (s) et but (r) de G dans $G^{(0)}$,
- une multiplication associative m à valeurs dans G, définie sur l'ensemble $G^{(2)} \subset G^2$ des couples (γ_1, γ_2) pour lesquels $r(\gamma_1) = s(\gamma_2)$,

qui vérifient les relations suivantes :

1. $r(\Delta(x)) = s(\Delta(x)) = x$, et $m(\gamma, \Delta(s(\gamma))) = m(\Delta(r(\gamma)), \gamma) = \gamma$;
2. $r(\gamma^{-1}) = s(\gamma)$ et $m(\gamma, \gamma^{-1}) = \Delta(r(\gamma))$;
3. $s(m(\gamma_1, \gamma_2)) = s(\gamma_2)$ et $r(m(\gamma_1, \gamma_2)) = r(\gamma_1)$;
4. $m(\gamma_1, m(\gamma_2, \gamma_3)) = m(m(\gamma_1, \gamma_2), \gamma_3)$ si $s(\gamma_1) = r(\gamma_2)$ et $s(\gamma_2) = r(\gamma_3)$.

Tout ensemble E est naturellement un groupoïde (trivial, en prenant $G^{(0)} = G = E$) et est également l'ensemble des unités d'un groupoïde non trivial, appelé groupoïde des paires, où $G = E^2$ et r et s sont respectivement la première et la seconde projection, la multiplication étant donnée par $(x, y)(y, z) = (x, z)$. On voit facilement qu'un groupe est exactement un groupoïde dont l'ensemble des unités $G^{(0)}$ est réduit à un singleton (l'unité du groupe). Plus généralement, une famille de groupes G_b indexée par un ensemble B est un groupoïde d'ensemble des unités B, la multiplication de deux éléments n'étant définie que pour deux éléments du même groupe G_b, par la multiplication du groupe. L'action d'un groupe sur un ensemble X définit également une structure de groupoïde appelée produit croisé, ce qui peut donner l'intuition qu'un groupoïde est une structure dynamique où sont présents simultanément la structure qui agit (le groupe) et l'espace sur lequel elle agit. Les deux situations « extrêmes » sont un groupe ou une famille de groupes, ce qui correspond à $r = s$ (la composante d'espace disparaît) et le groupoïde des paires ou plus généralement le graphe d'une relation d'équivalence sur un ensemble (la composante de groupe disparaît), où l'application (r, s) est une bijection sur son image.

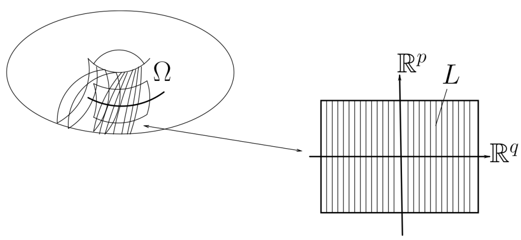
2. Groupoïdes de Lie

Cette structure de groupoïde devient encore plus intéressante, pour traiter des problèmes mathématiques concrets, si elle est pourvue d'une structure mesurable, topologique ou différentielle adaptée. Nous allons nous concentrer essentiellement sur ce dernier cas, dont l'apparition remonte aux travaux fondateurs d'Ehresmann [7] dans les années 50, suivis par ceux de Haefliger et Pradines. Celui-ci a connu un développement très rapide dans les années 70 et 80, à la fois en raison de son intérêt pour les questions de quantification/déformation (Weinstein) et pour la géométrie non commutative développée par Alain Connes. On appelle groupoïde de Lie un groupoïde pour lequel les ensembles G et $G^{(0)}$ sont des variétés différentiables, où toutes les applications structurelles sont lisses, avec la condition que les applications source et but sont des submersions. Dans ce cas l'application i est un difféomorphisme, et l'application Δ une immersion.

Tous les exemples précédents de groupoïdes fournissent des exemples de groupoïdes de Lie : le groupoïde trivial d'une variété différentiable, le groupoïde des paires sur une variété différentiable, un groupe de Lie, un fibré en groupes de Lie (en particulier un fibré vectoriel), l'action d'un groupe (ou d'un groupoïde) de Lie sur une variété différentiable, le graphe de la relation d'équivalence « être dans la même fibre » pour une fibration lisse. Voici un exemple très naturel supplémentaire : le groupoïde de monodromie (appelé aussi groupoïde fondamental) d'une variété différentiable connexe. On considère les classes d'homotopie à extrémités fixes de chemins tracés dans X. Cet ensemble de chemins (à homotopie près) est muni naturellement d'une structure de groupoïde différentiable, les applications but et source étant les extrémités des chemins dans X, et la multiplication de deux chemins d'extrémités qui coïncident étant l'aboutement des deux chemins. Ce groupoïde contient naturellement le groupe fondamental $\Pi_1(X,x)$ pour tout point $x \in X$ comme stabilisateur du point x.

3. Feuilletages et groupoïdes de Lie

Figure 1 – Un tore feuilleté.



Un feuilletage régulier (de dimension p) est la donnée sur une variété lisse M d'une relation d'équivalence dont les classes d'équivalence, appelées feuilles, sont connexes et forment une seconde structure de variété lisse (de dimension p) sur M, compatible avec la première, c'est-à-dire qu'il existe un système de cartes $\varphi : \Omega \to L \times T \subset \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ pour M pour lesquelles les composantes connexes de l'intersection de chaque feuille avec un ouvert (les plaques) sont de la forme $\varphi^{-1}(\mathbb{R}^p \times \{t\})$. Le groupoïde associé à la relation d'équivalence (« être dans la même feuille ») d'un feuilletage régulier $(M,\mathcal{F})$ ne peut pas toujours, comme dans le cas particulier d'une fibration, être muni d'une structure topologique ou différentielle consistante. On peut néanmoins toujours associer à un feuilletage un groupoïde de Lie, appelé groupoïde d'holonomie du feuilletage [9]. On peut y penser comme à un quotient du groupoïde fondamental du feuilletage (feuille à feuille) défini ci-dessus : l'ensemble des unités est M et le groupoïde est l'ensemble des classes d'homotopie de chemins tracés dans une même feuille. Étant donné un chemin tracé dans une feuille, on peut le recouvrir par des ouverts de cartes du feuilletage de sorte que chaque plaque d'un ouvert intersecte au plus une plaque de l'ouvert qui suit. De cette manière, on définit en suivant le chemin une bijection d'un voisinage d'une transversale du point de départ vers un voisinage d'une transversale du point d'arrivée. Pour obtenir le groupoïde d'holonomie, il faut encore quotienter le groupoïde fondamental ci-dessus en considérant comme équivalents deux chemins qui agissent de manière identique sur le transport parallèle, le long du chemin, d'un voisinage de la transversale du point de départ vers un voisinage de la transversale du point d'arrivée. Dans ce cas, l'action naturelle du groupoïde $\mathrm{Hol}(M,\mathcal{F})$ sur l'espace des unités M a pour orbites exactement les feuilles du feuilletage. C'est même le groupoïde de Lie minimal vérifiant cette propriété, dans le sens que tout autre groupoïde de Lie d'espace des unités M dont les orbites sont les feuilles du feuilletage admet un sous-groupoïde ouvert se projetant sur $\mathrm{Hol}(M,\mathcal{F})$. Il faut noter que, dans cette construction, le groupoïde d'holonomie (la variété G) n'est pas nécessairement séparé. Cette construction a été étendue par Pradines, Bigonnet, Debord au cas des feuilletages quasi-réguliers, puis plus récemment par Androulidakis et Skandalis [2] au cas de feuilletages singuliers quelconques, le prix à payer dans ce cas étant la disparition de la structure lisse globale de groupoïde de Lie.

D'un autre coté, pour tout groupoïde de Lie, les composantes connexes des orbites de l'action du groupoïde sur l'espace des unités définissent naturellement un feuilletage, en général singulier, de l'espace des unités.

4. Groupoïdes et géométrie non commutative

Le point de départ de la géométrie non commutative est le théorème de Gelfand qui établit une bijection entre les espaces topologiques localement compacts séparés et les C*-algèbres commutatives. Il donne l'idée que pour étudier un espace, on peut étudier, plutôt que l'espace lui-même, une algèbre de fonctions sur cet espace. Cette idée dépasse même le cadre topologique, puisqu'un théorème de Connes montre que la donnée d'une algèbre d'opérateurs commutative vérifiant certaines propriétés additionnelles permet de reconstruire complètement une variété riemannienne compacte. L'idée est d'appliquer cette correspondance à des