B. HELFFER
J. SJÖSTRAND

Résonances en limite semi-classique

Mémoires de la S. M. F. 2e série, tome 24-25 (1986)
<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1986_2_24-25__1_0>

Mémoire de la Société Mathématique de France, n°24/25
Supplément au Bulletin de la S.M.F.
Tome 114, 1986, fascicule 3

RESONANCES EN LIMITE SEMI-CLASSIQUE

par

B. HELFFER
Université de Nantes
Département de Mathématiques
2, Chemin de la Houssinière
F - 44072 NANTES, FRANCE.

J. SJÖSTRAND
Université Paris-Sud
Département de Mathématiques
F - 91405 ORSAY, FRANCE.

0. INTRODUCTION.

Ce travail est partiellement une continuation de [H.S.1-5] et le but au départ était d'étudier des résonances dans la limite $h \to 0$ pour des opérateurs de Schrödinger $P = -h^2 \Delta + V(x)$ dans des cas où le potentiel présente une "isle" contenant un "puits". Dans les applications le comportement de V pour des grandes valeurs de $|x|$ peut varier beaucoup. Ainsi pour l'effet Stark on a $V(x) \approx x_n$, pour l'étude des formules de Bender-Wu on a $V(x) \approx -|x|^4$ (ou quelque chose de plus général) et pour l'effet Zeeman on a (d'après une réduction que S. Graffi nous a indiqué) $V(x) = |x|^2 (1 - (x_1^2 + x_2^2)(x_3^2 + x_4^2))$ dans $\mathbb{R}^4$. Il nous a donc semblé naturel et souhaitable de rechercher la définition des résonances la plus générale possible permettant de "régler les problèmes à l'infini" une fois pour toutes. Le développement de cette théorie générale occupe une grande place dans ce travail et c'est seulement dans les chapitres 9 à 14 que l'on étudie le problème d'un puits dans une isle. La théorie générale est peut-être assez lourde à développer, mais d'une part on peut raisonablement espérer des simplifications techniques dans l'avenir car les idées de fond sont simples et naturelles, d'autre part elle nous donne un cadre très général pour traiter tous les problèmes mentionnés ci-dessus ainsi que d'autres, pas

Manuscrit reçu le 2 octobre 1985.

nécessairement liés à un puits de potentiel et pas seulement pour l'opérateur de Schrödinger mais pour des opérateurs elliptiques plus généraux. Finalement la théorie générale semble se montrer assez flexible dans les applications et donne un accès direct à l'essentiel du phénomène de la création des résonances.

Pour des gens avec une certaine formation en analyse microlocale et plus particulièrement dans la théorie des opérateurs intégraux de Fourier à phase complexe dans ses différentes formes (voir par exemple Melin-Sjöstrand [M.S], Sjöstrand [S.1]), les travaux d'Aguilar-Combes [Ag.C.] Balslev-Combes [B.C.] donnent une idée générale de ce qu'il faut faire pour développer une théorie microlocale des résonances. (Voir aussi Vainberg [V.1], [V.2]). D'un certain point de vue, l'idée de [Ag.C.], [B.C] revient à remplacer l'espace $L^2(\mathbb{R}^n)$ par un autre espace de Hilbert H tel que P en tant qu'opérateur non-borné dans H admet seulement du spectre discret près du niveau d'énergie (p.ex. 0) que l'on s'est fixé préalablement. (Les valeurs propres correspondantes sont alors appelées " résonances "). Dans notre présentation, on suppose l'existence d'une certaine "fonction fuite". C'est une fonction C^∞ réelle $G(x,\xi)$, appartenant à une certaine classe de symboles adaptée au potentiel V, telle que en dehors d'un compact dans $p^{-1}(0)$ le crochet de Poisson $H_p(G) = \{p,G\}$ soit positif et elliptique sur $p^{-1}(0)$. Ici $p = \xi^2 + V(x)$ est le symbole principal associé à $P = -h^2\Delta + V(x)$ et $H_p = \sum_1^n \partial p/\partial\xi_j \; \partial/\partial x_j - \partial p/\partial x_j \; \partial/\partial \xi_j$ est le champ hamiltonien de p. Donc, en dehors d'un compact la fonction $G|_{p^{-1}(0)}$ est strictement croissante le long des trajectoires de H_p, ce qui entraîne l'absence de trajectoires captées en dehors d'un compact de $p^{-1}(0)$. (On peut montrer en effet que l'existence d'une fonction fuite équivaut à une certaine condition de "non-capture" formulée à l'aide d'une certaine pseudo-métrique Lorenzienne associée à H_p).

INTRODUCTION

A une fonction fuite $G(x,\xi)$ on associe une variété I-Lagrangienne Λ_{tG} : $\operatorname{Im}\xi = -t\,\frac{\partial G(\operatorname{Re}(x,\xi))}{\partial \operatorname{Re} x}$, $\operatorname{Im} x = t\,\frac{\partial G}{\partial \operatorname{Re}\xi}$ dans $\mathbb{C}^{2n}$, pour $t>0$ assez petit. On fait aussi une hypothèse d'analyticité sur V au moins dans un voisinage de l'infini. Alors pour $t>0$ assez petit et $(x,\xi)\in\Lambda_{tG}$;

$$(0.1) \qquad p(x,\xi) = p(\operatorname{Re}(x,\xi)) - i\,t\,\{p,G\}\,(\operatorname{Re}(x,\xi)) + \mathcal{O}(t^2) \quad ,$$

et en imposant aussi une condition d'ellipticité sur p dans le domaine réel loin de $p^{-1}(0)$, on constate que $p|_{\Lambda_t}$ est un symbole elliptique à l'infini (dans une classe naturelle de symboles).

A Λ_{tG} on associe ensuite un espace de Hilbert $H = H(\Lambda_{tG},1)$ de la manière suivante : d'abord, on introduit une transformation de Fourier-Bros-Iagolnitzer (F.B.I). On utilise ici la terminologie de [S.1] où sont poursuivis des arguments de Bros et de Iagolnitzer dans l'étude des singularités analytiques microlocales, et techniquement les transformations utilisées ici sont proches de celles utilisées dans [S.1]. Ces transformations sont bien entendu des variantes de la transformation de Bargmann. Grosso modo il s'agit d'un certain opérateur intégral de Fourier $T = T_h$ qui transforme des fonctions $u(x)$ sur $\mathbb{R}^n$ en des fonctions $v = T\,u(x,\xi)$ sur $\mathbb{R}^{2n}$ et qui induit une isométrie $L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^{2n})$. L'espace $H(\Lambda_{tG},1)$ est alors grosso modo l'ensemble des $u = u(x)$ tels que $T\,u \in L^2\,(\mathbb{R}^{2n}\,;\, e^{-2t\tilde{G}(t,x,\xi)/h}\,dx\,d\xi\,)$. Ici $\tilde{G}(t,x,\xi)$ est une fonction proche de $G(x,\xi)$. Si γ : $]-\infty,+\infty[\ \ni s \to \gamma(s) \in p^{-1}(0)$ est une trajectoire de H_p qui évite un certain compact on montre que $G(\gamma(s)) \to \pm\infty$, $s \to \pm\infty$ et un élément de $H(\Lambda_{tG},1)$ doit en quelque sorte être à décroissance exponentielle près de $\gamma(s)$ si $-s$ est grand, mais peut en revanche avoir une croissance exponentielle près de $\gamma(s)$ si s est grand.

On introduit ensuite des opérateurs pseudo-différentiels associés à l'espace $H(\Lambda_{t\,G},1)$. Le symbole principal d'un tel opérateur est alors un symbole sur $\Lambda_{t\,G}$. On peut considérer P comme un opérateur pseudodifférentiel de symbole principal $p|_{\Lambda_t}$. Ce symbole étant elliptique à l'infini, on montre ensuite que le spectre de P comme opérateur non-borné dans $H(\Lambda_{t\,G},1)$ est discret dans un voisinage de 0 et que ce spectre (c.à.d. les résonances) est essentiellement indépendant du choix de la fonction fuite G et du paramètre $t > 0$ (assez petit). Le cas de Aguilar-Combes correspond à la fonction fuite $G(x,\xi) = x \cdot \xi$. On peut trouver des potentiels admettant des fonctions fuite mais dont aucune ne peut être linéaire en ξ. Pour un tel potentiel il semble impossible de traiter des résonances seulement par déformation de $\mathbb{R}^n$ dans l'espace des configurations, une théorie microlocale semble alors s'imposer.

On doit rappeler que l'approche d'Aguilar-Combes et Balslev-Combes a été développée par beaucoup d'auteurs : voir B. Simon [Si.1-Si.3], I. Herbst [He.], H. Cycon [Cy.], Combes-Duclos-Seiler [C.D.Se.] ainsi que les références dans ces articles. Combes-Duclos-Seiler [C.D.Se.] étudient un problème unidimensionel de résonances avec un puits dans une isle par la méthode du " exterior complex scaling ". Bien entendu il est extrêmement probable (mais nous n'avons pas encore vérifié les détails) que notre définition des résonances coïncide avec celles de ces auteurs dans tous les cas où une telle coïncidence est pensable.

Voici le plan de notre travail : Dans la section 1 on introduit certaines fonctions d'échelle et des espaces de symboles associés. Dans la section 2 on fait quelques remarques sur une classe de variétés I-Lagrangiennes, dans la section 3 on étudie certains espaces de Sobolev en préparation de la section 5. Dans la section 4 on introduit d'abord des résolutions de l'identité et puis des transformations de F.B.I. Dans la section 5 on peut ensuite définir l'espace $H(\Lambda_{tG},1)$ ainsi que des variantes de cet espace. Les sections 6 et 7 sont consacrées respectivement aux opérateurs pseudodifférentiels et Fourier intégraux agissant dans les espaces $H(\Lambda_{tG},m)$ (où m est une fonction d'ordre). Dans la section 8 on peut alors finalement développer la théorie générale des résonances. Les sections 9 et 10 sont consacrées à l'étude des résonances obtenues par un " effet tunnel " d'un puits de potentiel dans une isle de potentiel. Dans la section 9 on obtient des résultats généraux pour un puits quelconque et on y montre qu'il y a une bijection b entre des valeurs propres d'un certain problème de Dirichlet localisé dans l'isle et des résonances, telle que $b(\mu)-\mu=\mathcal{O}\left(e^{(\varepsilon-2S_0)/h}\right)$, $\varepsilon>0$, où S_0 est la distance d'Agmon du puits au bord de l'isle. Dans la section 10 on obtient des résultats plus précis sur les parties imaginaires de ces résonances dans le cas où le puits se réduit à un point où $V''>0$. On y obtient d'une part des minorations et des majorations sur les parties imaginaires et d'autre part des développements asymptotiques. Dans le chapitre 11, on explicite les résultats dans un cas unidimensionel et on établit un lien avec un cas multidimensionel symétrique. Dans les chapitres 12, 13, 14 on étudie des formules de Bender-Wu (multidimensionelles) notamment pour l'effet Zeeman et pour des exemples étudiés par Banks, Bender et Wu, [Ba.Ben.W.], [Ba.Ben.]. Il s'agit donc de donner des formules pour la suite des coefficients dans une série de perturbations. Les résultats de la section 10 permettent d'obtenir des résultats qui à notre connaissance sont rigoureusement démontrés pour la première fois. On finit par un appendice où on rappelle des arguments de la théorie de Fredholm adaptés à nos besoins. Pour abréger ce texte déjà un peu long, on a supprimé trois autres appendices : un sur un exemple de potentiel où notre théorie s'applique mais qui n'admet aucune fonction fuite linéaire en ξ, un sur l'équivalence entre l'existence d'une fonction fuite et une certaine condition de "non-capture" à l'infini, et un troisième (pas encore écrit) sur l'équivalence de notre définition et celle d'Aguilar-Combes dans des cas d'intersection des deux théories.

Les résultats principaux de ce travail sous une forme un peu préliminaire ont été exposés dans le "Workshop and Conference on hyperbolic equations" à Katuda et Kyoto en Août et Septembre 1984. Voir [S.2].

Nous tenons à remercier B. Simon qui nous a signalé l'application possible des résonances aux formules de Bender-Wu, nous sommes reconnaissants à S. Graffi qui nous a indiqué beaucoup de références et qui nous a suggéré la méthode de réduction dans le chapitre 13 pour l'effet Zeeman. Nous remercions finalement Mme Bardot, pour l'excellente dactylographie de ce texte long et pénible.

1. ESPACES DE SYMBOLES.

Notre calcul pseudo-différentiel dans le cas où la variété I-Lagrangienne est réduite à $\mathbb{R}^{2n}$ sera essentiellement connu. Voir R. Beals [Be], L. Hörmander [Hö.2] et N. Dencker [De], ainsi que B. Helffer et D. Robert [H.R] qui traitent aussi la dépendance de la constante de Planck.

On se donne deux fonctions $r, R \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $r > 0$, $R > 0$, vérifiant

(1.1) $$r(x)\, R(x) \geq 1 \quad , \quad r(x) \geq 1 \quad , \quad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}^n.$$

Pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$ il existe $C_\alpha > 0$ tel que

(1.2) $$|\partial_x^\alpha R(x)| \leq C_\alpha R(x)^{1-|\alpha|} \quad , \quad |\partial_x^\alpha r(x)| \leq C_\alpha r(x)\, R(x)^{-|\alpha|},$$

pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

On pose $\tilde{r}(x,\xi) = (r(x)^2 + \xi^2)^{1/2} \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$.

Définition 1.1. La fonction $0 < m \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ est une fonction d'ordre si pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$, il existe $C_{\alpha,\beta} > 0$ tel que

(1.3) $$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta m(x,\xi)| \leq C_{\alpha,\beta}\, m(x,\xi)\, \tilde{r}(x,\xi)^{-|\beta|}\, R(x)^{-|\alpha|},$$

pour tout $(x,\xi) \in \mathbb{R}^{2n}$.

Si $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ est une fonction C^∞ vérifiant $\left|\left(\frac{d}{dt}\right)^k f(t)\right| \leq C_k f(t) t^{-k}$, $k = 0,1,2,\dots$, et si $m \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ est une fonction d'ordre, alors $f \circ m$ est une fonction d'ordre. En particulier si m est une f. o. et $\kappa \in \mathbb{R}$, alors m^κ est une f. o. On observe aussi que le produit de deux fonction d'ordre est une fonction d'ordre.

Définition 1.2. Si m est une fonction d'ordre, on dit que a est un symbole d'ordre m ; $a \in S(m)$, si $a \in C^\infty(\mathbb{R}^{2n})$ et si pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$, il existe $C_{\alpha,\beta} > 0$ tel que

(1.4) $$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x,\xi)| \leqslant C_{\alpha,\beta}\, m(x,\xi)\, \tilde{r}(x,\xi)^{-|\beta|}\, R(x)^{-|\alpha|} ,$$

pour tout $(x,\xi) \in \mathbb{R}^{2n}$.

Exemple. $R(x)$, $r(x)$, $\tilde{r}(x,\xi)$ sont des fonctions d'ordre ainsi que $\tilde{r}^m R^k$ pour $m,k \in \mathbb{R}$. On pose $S^{m,k} = S(\tilde{r}^m R^k)$.

On fera aussitôt deux extensions de la Définition 1.2. : d'abord on admettra des symboles qui dépendent d'un paramètre $h > 0$ qui varie dans $]0,1]$ ou dans un sous-ensemble de cet intervalle. Pour $\ell \in \mathbb{R}$, on dit alors que $a(x,\xi,h) \in S(m\, h^{-\ell})$ si $a(\cdot,\dots,h)h^\ell$ est uniformément dans $S(m)$, c.à.d. si pour tous $\alpha,\beta \in \mathbb{N}^n$ on a :

(1.5) $$|\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x,\xi,h)| \leqslant C_{\alpha,\beta}\, h^{-\ell}\, m(x,\xi)\, \tilde{r}(x,\xi)^{-|\beta|}\, R(x)^{-|\alpha|} ,$$

pour $(x,\xi) \in \mathbb{R}^{2n}$, $h \in]0,1]$.

Deuxièmement, on travaillera souvent avec des symboles $a(y,x,\xi)$, $a(z,y,x,\xi,h)$ et.c. où $(x,\xi) \in \mathbb{R}^{2n}$ et où y et z varient dans $\mathbb{R}^n$ ou dans $\mathbb{C}^n$. Il est alors sous-entendu que l'on se restreint toujours à un domaine du type $|y-x| \leqslant \frac{1}{C_0} R(x)$, $|z-x| \leqslant \frac{1}{C_0} R(x)$, où $C_0 > 0$ est assez grand pour que $\frac{1}{C_0} \leqslant \frac{R(y)}{R(x)} \leqslant C_0$ pour $|y-x| \leqslant \frac{R(x)}{C_0}$. On dit alors par exemple que $a(z,y,x,\xi,h)$ est de classe $S(m\, h^{-\ell})$ si

(1.6) $$\left|\partial^\alpha_{(z,\bar{z})}\, \partial^\beta_{(y,\bar{y})}\, \partial_x^\gamma\, \partial_\xi^\rho a\right| \leqslant C_{\alpha,\beta,\gamma,\rho}\, m(x,\xi) h^{-\ell} \tilde{r}(x,\xi)^{-|\rho|}\, R(x)^{-|\alpha|-|\beta|-|\gamma|} .$$

Plus tard on étendra aussi (de manière évidente) ces notions de symboles au cas où (x,ξ) varie dans une variété I-Lagrangienne de classe $\dot{S}^{1,1}$ (définie plus loin).

On remarque que si $a_j \in S(m_j)$, $j = 1,2$ alors $a_1 a_2 \in S(m_1 m_2)$. Aussi si $a \in S(m)$ et si il existe $C_0 > 0$ t.q. $|a| \geqslant \frac{1}{C_0} m$, alors $\frac{1}{a} \in S(m^{-1})$.

Remarque 1.3. Les classes de symboles ne changent pas si l'on remplace r, R par $\hat{r}, \hat{R}$ vérifiant aussi (1.1), (1.2) et avec $r \sim \hat{r}$, $R \sim \hat{R}$. (Ici $r \sim \hat{r}$ signifie que $\frac{r}{\hat{r}}, \frac{\hat{r}}{r}$ sont bornées sur $\mathbb{R}^n$). Dans les applications les fonctions r, R ne sont peut-être pas directement C^∞, mais seulement continues vérifiant (1.1) et pour $0 \leq c \leq 1 \leq C$:

$$\widetilde{(1.2)} \qquad \text{Si } |x-y| \leq c\,R(x)\text{, alors } \frac{R(x)}{R(y)}, \frac{r(x)}{r(y)} \in \left[\frac{1}{C}, C\right].$$

On peut alors régulariser r, R par une sorte de partition C^∞ de la manière suivante : Soit $x_j \in \mathbb{R}^n$, $j = 1, 2, \ldots$ une suite maximale de points telle que les boules $\overline{B(x_j, \frac{c}{4C^2} R(x_j))}$ sont disjointes. Alors les boules $\overline{B(x_j, \frac{c}{2} R(x_j))}$ recouvrent $\mathbb{R}^n$. Soit $\chi \in C_0^\infty(B(0,1)\,; [0,1])$ égale à 1 dans $\overline{B(0, \frac{1}{2})}$ et posons $\chi_j(x) = \chi((x-x_j)/c\,R(x_j))$, à support dans $B(x_j, c\,R(x_j))$ et égale à 1 dans $B(x_j, \frac{c}{2} R(x_j))$.

Si $y \in \bigcap_1^N \overline{B(x_{j_\nu}, c\,R(x_{j_\nu}))}$, alors pour $1 \leq \nu, \mu \leq N$; $\frac{R(x_{j_\nu})}{R(x_{j_\mu})} \in \left[\frac{1}{C^2}, C^2\right]$, et puisque les boules $\overline{B(x_j, \frac{1}{4} \frac{c}{C^2} R(x_j))}$ sont disjointes, on constate que $N \leq N_0$, où N ne dépend que de n, c, C. On pose

$$\hat{R}(x) = \sum_1^\infty R(x_j)\, \chi_j(x) \quad , \quad \hat{r}(x) = \sum_1^\infty r(x_j)\, \chi_j(x) \quad ,$$

où les sommes sont localement finies avec au plus N_0 termes $\neq 0$. On constate que $\hat{R} \sim R$, $\hat{r} \sim r$ et que $\hat{R}$ et $\tilde{r}$ vérifient (1.2). On remarque aussi que $\tilde{\chi}_j = \frac{\chi_j}{\Sigma \chi_k}$ est une partition d'unité avec les propriétés agréables suivantes : 1°) Au plus N_0 des supports des $\tilde{\chi}_j$ peuvent s'entrecouper dans un même moint, 2°) $\operatorname{supp} \tilde{\chi}_j \subset B(x_j, c\,R(x_j))$, 3°) les sommes partielles $\sum_{j \in K} \tilde{\chi}_j$, $K \subseteq \{1, 2, \ldots\}$, forment une famille bornée de $S^{0,0}$, quand K varie.

Fin de Remarque.