SYSTÈMES INTÉGRABLES SEMI-CLASSIQUES : DU LOCAL AU GLOBAL

San Vũ Ngọc

Panoramas et Synthèses

Numéro 22

2006

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du Centre national de la recherche scientifique et du Ministère de la culture et de la communication (aide de la délégation générale à la langue française)

Vũ Ngọc San

SYSTÈMES INTÉGRABLES SEMI-CLASSIQUES : DU LOCAL AU GLOBAL

PANORAMAS ET SYNTHÈSES 22

Société Mathématique de France 2007

Diffusion

Maison de la SMF
B.P. 67
13274 Marseille Cedex 9
France
smf@smf.univ-mrs.fr

AMS
P.O. Box 6248
Providence RI 02940
USA
www.ams.org

EDP Sciences
17, avenue du Hoggar
91944 les Ulis cedex A
France
www.edpsciences.com

Tarifs 2007

Vente au numéro : 26 € ($ 38)
Abonnement Europe : 51 €, hors Europe : 60 € ($ 87)
Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat : Nathalie Christiaën

Panoramas et Synthèses
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96
revues@smf.ens.fr • http://smf.emath.fr/

ISSN 1272-3835

ISBN 2-85629-178-3

Directrice de la publication : Marie-Françoise ROY

PANORAMAS ET SYNTHÈSES 22

SYSTÈMES INTÉGRABLES SEMI-CLASSIQUES : DU LOCAL AU GLOBAL

Vũ Ngọc San

Société Mathématique de France 2007
Publié avec le concours du Centre National de la Recherche Scientifique
et du Ministère de la Culture et de la Communication

Vũ Ngọc San

Institut Fourier, Université de Grenoble I, UMR 5582 CNRS, BP 74,
38402 St Martin d'Hères Cedex.

Url : `http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~svungoc/`

***Classification mathématique par sujets* (2000). —** 37J35, 70H06, 58K45, 58J40, 53D, 81Q10, 34C20, 81S10.

***Mots clefs*. —** Systèmes complètement intégrables, géométrie symplectique, feuilletages lagrangiens, formes normales, singularités non dégénérées, invariants symplectiques, opérateurs pseudo-différentiels, analyse semi-classique, microlocalisation, règles de Bohr-Sommerfeld, monodromie, spectre conjoint, polytope moment, systèmes presque toriques.

SYSTÈMES INTÉGRABLES SEMI-CLASSIQUES : DU LOCAL AU GLOBAL

Vũ Ngọc San

Résumé. — Ce livre présente une vue panoramique des systèmes hamiltoniens complètement intégrables de dimension finie dans laquelle on apercevra, côte à côte et sous des traits similaires, leurs aspects classiques et quantiques.

La mécanique classique y est abordée sous l'angle de l'étude géométrique du feuilletage lagrangien singulier, dont les feuilles régulières sont les fameux tores de Liouville. Les singularités du système sont étudiées au moyen de formes normales locales et semi-globales, faisant apparaître des invariants topologiques et symplectiques. Certains liens avec les variétés toriques sont explorés.

Les systèmes intégrables quantiques sont traités dans le cadre de l'analyse microlocale semi-classique. Le calcul pseudo-différentiel et les opérateurs intégraux de Fourier offrent un outillage efficace pour découvrir comment les caractéristiques géométriques de ces systèmes influent sur leurs propriétés spectrales.

***Abstract* (Semiclassical integrable systems). —** This book presents a panorama of finite dimensional completely integrable Hamiltonian systems, in which classical aspects and quantum aspects will be living side by side, with similar appearances.

Classical mechanics is considered from the viewpoint of the geometric study of the singular Lagrangian foliation, whose regular leaves are the famous Liouville tori. Singularities are tackled using local and semi-global normal forms, which involve topological and symplectic invariants. Some relationships with toric varieties are explored.

Quantum integrable systems are treated in the framework of semiclassical microlocal analysis. Pseudo-differential calculus and Fourier integral operators offer efficient tools for discovering how the geometric features of these systems influence their spectral properties.

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE 1

INTRODUCTION

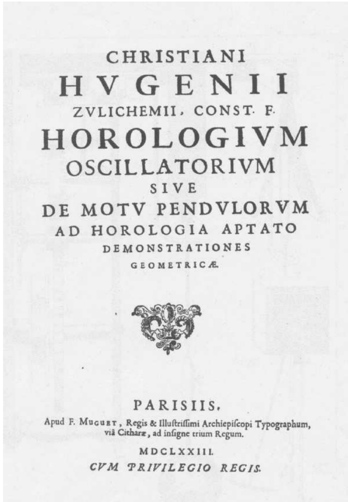
> La Nature est un temple où de vivants piliers
> Laissent parfois sortir de confuses paroles ;
> L'homme y passe à travers des forêts de symboles
> Qui l'observent avec des regards familiers.
>
> BAUDELAIRE, Correspondances *(Les Fleurs du Mal)*

Le pendule de Huygens. — Les origines de la géométrie et donc de la mécanique (en particulier céleste) se confondent avec celles des mathématiques elles-mêmes. Néanmoins, on attribue généralement l'étude du premier système dynamique au mathématicien hollandais Christiaan Huygens. Sous le règne de Louis XIV, Huygens obtient la charge importante de diriger l'Académie royale des sciences. C'est ainsi qu'il propose au roi son célèbre traité sur le mouvement du pendule pesant et son application à la construction d'horloges à balancier [**87**]. Huygens est fier que ses pendules, les plus exactes jamais construites alors, qui équipent les appartements du roi, servent aux bateaux pour leurs mesures de longitudes[(1)] et procèdent d'une analyse mathématique subtile. C'est un exemple à méditer d'une symbiose entre ce qu'on appellerait aujourd'hui les mathématiques pures et appliquées :

> *Dans cette science* [la géométrie] *que j'ai toujours beaucoup admirée et aimée, je me suis proposé surtout, toutes les fois que je m'y adonnai, la considération de problèmes dont la solution serait utile soit pour la commodité de la vie soit pour la connaissance de la nature. Mais c'est lorsque je tombais sur des sujets où l'utilité était unie à une difficulté de les tirer au clair qui exigeait des raisonnements subtils que j'avais l'impression de m'y appliquer le plus avantageusement.* [op. cit.]

---

(1) Avec un succès limité, il est vrai. En contrepartie, la précision des pendules a permis de découvrir que le champ gravitationnel terrestre n'est pas constant à la surface du globe !



CHRISTIANI
HVGENII
ZVLICHEMII, CONST. F.
HOROLOGIVM
OSCILLATORIVM
SIVE
DE MOTV PENDVLORVM
AD HOROLOGIA APTATO
DEMONSTRATIONES
GEOMETRICÆ.

PARISIIS,
Apud F. MUGUET, Regis & Illustrissimi Archiepiscopi Typographum, viâ Citharæ, ad insigne trium Regum.
MDCLXXIII.
CVM PRIVILEGIO REGIS.

Christiaan Huygens (1629–1695) et son livre sur les horloges à balancier

Le pendule de Huygens le plus simple, appelé aussi « pendule sphérique », pourra servir d'exemple pour la majorité des mathématiques que je présenterai ici. C'est le premier exemple de ce qu'on appelle aujourd'hui un *système complètement intégrable*, et c'est un exemple non trivial. Huygens savait que pour un pendule simple seules les *petites oscillations* possèdent une fréquence constante, ce qui en fait en quelque sorte le précurseur de l'analyse *locale* des systèmes dynamiques. L'analyse *globale* de ce système est bien plus tardive, puisque c'est en 1980 que Cushman & Duistermaat [**52**] exhibent le pendule sphérique comme premier exemple dont la *monodromie* est non triviale. Une dizaine d'années plus tard, cette monodromie est comprise en terme de la *singularité* dite *foyer-foyer* que possède ce système lorsque le pendule est en position d'équilibre instable, à son altitude maximale [**104**], [**164**], [**166**]. La géométrie de cette singularité est exploitée dans [**147**] pour décrire son influence sur les systèmes *semi-classiques* : les systèmes décrits par la mécanique quantique et dont la limite classique possède de telles singularités. Cette description met en œuvre des invariants spectraux qui se révèlent après coup généraliser des invariants symplectiques semi-globaux de ces fibrations lagrangiennes singulières [**151**]. À leur tour, ces invariants se révèlent utiles [**57**] pour déterminer la persistance de tores invariants (KAM) en cas de perturbation du système... Enfin dans l'étude du pendule sphérique se pose également la question globale du recollement des informations (géométrique, spectrales) recueillies en différents points singuliers. Il reste néanmoins que le pendule est bel et bien un modèle de simplicité dans la mesure où il ne présente pas de singularité de type hyperbolique. Les singularités hyperboliques font la richesse d'autres exemples non moins célèbres comme les toupies (Lagrange, Kovalevskaya), les billards ellipsoïdaux, le problème de C. Neumann, etc. (consulter par exemple le livre [**115**]).

Joseph Louis LAGRANGE
(1736–1813)

Sophia KOVALEVSKAYA
(1850–1891)

Avant d'entrer dans le vif du sujet, je me propose de situer dans leur cadre historique les notions qui vont nous intéresser et qui concernent l'étude des systèmes complètement intégrables en mécanique classique et quantique.

Mécanique classique

> [...] *il est singulier que dans les questions qui paraissent très simples, dans le cas, par exemple, du mouvement de trois points qui s'attirent mutuellement, on ne connaisse pas d'autres intégrales exactes de ces équations, que celles qui sont communes à tous les problèmes, et qui sont fournies par les principes généraux du mouvement du centre de gravité, des aires, des forces vives.* POISSON [**122**]

On utilisera toujours la formulation *hamiltonienne*(2) de la mécanique classique. L'espace des positions et des vitesses, ou encore *espace des phases*, est en termes modernes une variété symplectique. C'est une variété différentiable M munie d'une 2-forme différentielle ω fermée ($\mathrm{d}\omega = 0$) et non dégénérée (de déterminant non nul en chaque point) ; on dit que ω est une forme symplectique. Hamilton avait introduit une certaine intégrale de cette forme, qu'il appelait la « fonction caractéristique », qu'on a vite rebaptisée « intégrale d'action ». Poisson a très vite reconnu l'utilité de la vision de Hamilton et de cette forme symplectique en elle-même, qu'il appelait en termes surannés une « quantité infiniment petite du second ordre » [**122**]. Elle induit une dualité entre 1-formes et champs de vecteurs sur M. Étant donnée une fonction $f \in C^\infty(M)$, on note $\mathcal{X}_f$ le champ hamiltonien correspondant :

$$\omega(\mathcal{X}_f, .) = -\mathrm{d}f.$$

(2) William Rowan Hamilton (1805–1865), brillant mathématicien irlandais. Il écrit son mémoire [**76**] à l'âge de 29 ans.

Ce champ définit un système dynamique sur M dont les solutions sont les trajectoires $t \mapsto m(t)$ vérifiant

$$\frac{\mathrm{d}m(t)}{\mathrm{d}t} = \mathcal{X}_f\big(m(t)\big). \tag{1}$$

On appelle (1) le système hamiltonien associé à la fonction f ; cette dernière étant appelée en retour le « hamiltonien du système ».

À toute structure symplectique est associé un *crochet de Poisson*, introduit par Poisson en 1809 [**121**] — donc bien avant Hamilton —, qui est une forme bilinéaire antisymétrique sur $C^\infty(M)$ donnée par la formule

$$\{f, g\} = \mathcal{X}_f g = \omega(\mathcal{X}_f, \mathcal{X}_g).$$

Une fonction g transportée le long du flot du système hamiltonien (1) vérifie donc

$$\frac{\mathrm{d}g(m(t))}{\mathrm{d}t} = \{f, g\}\big(m(t)\big).$$

En particulier f est toujours constante le long des trajectoires du système. Il est remarquable qu'ici f et g jouent des rôles interchangeables ; on en déduit le *théorème de Noether* : si on se donne un système hamiltonien f qui admet une « symétrie hamiltonienne » g (*i.e.* f est invariante par le flot engendré par g), alors g est une *intégrale du mouvement* : g est invariante le long du flot engendré par f.

En mécanique classique, un système hamiltonien complètement intégrable est un système possédant un ensemble complet d'intégrales premières en involution. Autrement dit si M est de dimension $2n$ on se donne n fonctions lisses $f_1, \dots, f_n$ dont les différentielles sont presque partout indépendantes et vérifiant $\{f_i, f_j\} = 0$ pour tout couple (i, j)[(3)]. Nombreux sont les exemples historiques de systèmes hamiltoniens qui, par le jeu de symétries et via le théorème de Noether, se sont révélés être complètement intégrables.

La plupart du temps, dans ce livre, on ne s'intéressera pas particulièrement au hamiltonien H qui définit le système. En principe, c'est n'importe quelle fonction qui commute avec les f_i. Certains auteurs demandent parfois que H soit une fonction des f_i — ce qui est toujours le cas près d'un point régulier. D'autres supposent même que H est l'une des fonctions f_i, par exemple f_1.

De notre point de vue, l'objet essentiel sera plutôt l'*application moment*

$$F := (f_1, \dots, f_n) : M \longrightarrow \mathbb{R}^n.$$

Tores de Liouville ? — Le premier résultat fondamental dans l'étude des systèmes complètement intégrables est qu'au voisinage d'une composante connexe régulière d'une fibre de F, F est une fibration symplectiquement linéarisable. Si la fibre est

(3) Un peu d'algèbre linéaire montre que n est le nombre maximum de telles fonctions indépendantes en involution.

compacte, le modèle linéaire est le voisinage de la section nulle de $T^*\mathbb{T}^n$ muni de la fibration en tores horizontaux.

Cela implique en particulier que les trajectoires de n'importe quel hamiltonien du système sont des droites s'enroulant sur un tore horizontal et parcourues à vitesse constante (mais dépendant du tore considéré).

Joseph LIOUVILLE (1809–1882)

Ces tores lagrangiens sur lesquels s'effectue la dynamique sont nommés *tores de Liouville*, alors que le théorème en question ou théorème des variables *actions-angles* est attribué à Liouville et Arnold. Comme nous allons le voir, cette nomenclature ne reflète pas exactement l'historique du sujet.

Né l'année où Poisson introduit son « crochet », Liouville a certainement œuvré pour le développement des systèmes complètement intégrables. Par l'introduction dans les années 1850 de la 1-forme différentielle $\alpha = \sum_i p_i \mathrm{d}q_i$ dite avec justesse« 1-forme de Liouville », il est un des précurseurs de la vision moderne de la mécanique en terme de géométrie symplectique(4). Sa contribution principale dans ce domaine est d'avoir montré comment intégrer localement un « système complètement intégrable » au moyen d'une primitive locale de α restreinte aux sous-variétés invariantes [**99**].

Pour autant, l'appellation « tore de Liouville » me paraît douteuse. À ma connaissance, rien dans les publications de Liouville ne permet d'affirmer qu'il savait qu'en général le mouvement avait lieu sur un tore (même s'il est probable qu'il s'en soit rendu compte sur un certain nombre d'exemples où les tores lagrangiens sont donnés par des équations polynomiales explicites). Au contraire, les articles [**99**], [**100**], [**98**] ne font état que d'études à caractère purement *local*.

La première étude sérieuse de la dynamique des systèmes intégrables sur toute la fibre lagrangienne $F^{-1}(c)$ est due il me semble à Mineur [**108**], [**109**], qui dans des

(3) Il est difficile d'être catégorique sur l'historique de cette 1-forme. D'une certaine façon, moins explicite, elle est déjà présente dans les travaux de Poisson et Hamilton.

articles des années 1935–1937 récemment redécouverts (voir [**145**] et [**168**]) énonce et prouve pour la première fois le théorème des variables actions-angles[5]. On peut même arguer qu'Einstein connaissait ces tores « de Liouville », qui apparaissent plus ou moins dans son article de 1917 [**60**]. Mais l'argument mathématique essentiel manque.

Ce théorème a ensuite été redécouvert par Arnold en plusieurs étapes. Il montre en 1963 [**2**] que les fibres sont des tores sur lesquelles la dynamique est quasi-périodique ; il complète l'énoncé dans [**5**] en incluant la description du voisinage du tore, mais rajoute pour cela une hypothèse superflue. Voir également [**4**].

Plus récemment, de nombreuses personnes ont fourni diverses preuves complètes, dont celle du célèbre article de Duistermaat [**52**].

Duistermaat construit dans cet article les obstructions à *globaliser* le théorème de Liouville-Arnold-Mineur, lorsque l'ouvert des valeurs régulières de F n'est pas topologiquement trivial. Il obtient deux invariants : la monodromie et la classe de Chern. La première est l'obstruction à ce que le fibré en tore donné par F soit un fibré principal ; si la monodromie est triviale, la classe de Chern est la classe d'équivalence du fibré principal.

Le problème de la globalisation des variables actions-angles avait déjà été abordé quelques années auparavant par Nekhoroshev [**117**], qui en avait donné une réponse un peu moins complète. Par la suite, d'autres généralisations ont été proposées, dont celle de Dazord & Delzant [**44**] qui étudient le cas de feuilletages isotropes symplectiquement complets (dans le sens où l'orthogonal symplectique est aussi un feuilletage). Un point intéressant est qu'ils voient la base comme une variété de Poisson.

Singularités. — L'approche de Duistermaat est très naturelle. D'un point de vue pratique, son principal inconvénient est qu'elle ne considère que la partie régulière de la fibration F. On sait bien par l'exemple de la théorie de Morse que de tels invariants sont souvent calculables au moyen justement des *singularités* du système.

Même si les premières *formes normales locales* pour les singularités des systèmes intégrables datent maintenant de près de 40 ans (cf. [**125**]), leur utilisation globale est très récente (et d'une certaine façon, assez tardive par rapport aux progrès de la géométrie algébrique).

Dans cette optique, le premier résultat — que j'ai déjà mentionné plus haut — est qu'on peut « génériquement » calculer la monodromie par l'étude des singularités de type foyer-foyer. En se basant sur les formes normales locales C^∞ des singularités des systèmes intégrables dues à Eliasson [**61**], on peut classifier symplectiquement ces systèmes près d'une telle fibre singulière ; c'est ce que j'appelle la classification *semi-globale* [**151**]. Le passage du semi-global au global possède plusieurs facettes. Dans la suite logique de l'article de Duistermaat, l'approche « classe caractéristique » qui permet une classification topologique au moyen d'une chirurgie adaptée a été menée

[5] J'espère mettre au propre dans un délai (dé)raisonnable tous les détails de la preuve de Mineur…