324

ASTÉRISQUE

2009

# FAMILIES OF GALOIS REPRESENTATIONS AND SELMER GROUPS

Joël Bellaïche & Gaëtan Chenevier

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Astérisque est un périodique de la Société mathématique de France.

Numéro 324, 2009



***Diffusion***

Maison de la SMF
Case 916 - Luminy
13288 Marseille Cedex 9
France
`smf@smf.univ-mrs.fr`

AMS
P.O. Box 6248
Providence RI 02940
USA
`www.ams.org`

***Tarifs 2009***

*Vente au numéro :* 70 € ($ 105)
*Abonnement* Europe : 454 €, hors Europe : 503 € ($ 754)
Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

***Secrétariat : Nathalie Christiaën***

Astérisque
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96
`revues@smf.ens.fr` • `http://smf.emath.fr/`



ISSN 0303-1179

ISBN 978-2-85629-264-8

Directeur de la publication : Aline BONAMI

324

ASTÉRISQUE

2009

# FAMILIES OF GALOIS REPRESENTATIONS AND SELMER GROUPS

Joël Bellaïche & Gaëtan Chenevier

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

*Joël Bellaïche*
509 Math Building, Columbia University, 2990 Broadway, New York, NY 10027
`jbellaic@math.columbia.edu`

*Gaëtan Chenevier*
Laboratoire Analyse Géométrie et Applications, Institut Galilée, Université Paris 13, 99 Av. J.-B. Clément, 93430 Villetaneuse, France
`Gaetan.Chenevier@normalesup.org`

***Classification mathématique par sujet* (2000).** — 11F80 (11F33, 11F85, 14F30), 14D15 (14B12, 14G22), 11G40 (11S25, 11F70, 11R39, 11F55), 20G05 (20C15, 15A24).

***Mots-clefs.*** — Pseudo-caractère, lieu de réductibilité, représentation galoisienne, trianguline, déformation $p$-adique, variété de Hecke, groupe de Selmer, conjectures de Bloch-Kato, groupe unitaire, représentation automorphe, conjecture d'Arthur.

*Ce livre est dédié à la mémoire de Serge Bellaïche, frère et ami.*

# FAMILIES OF GALOIS REPRESENTATIONS AND SELMER GROUPS

Joël BELLAÏCHE & Gaëtan CHENEVIER

***Abstract.*** — This book presents an in-depth study of the families of Galois representations carried by the $p$-adic eigenvarieties attached to unitary groups. The study encompasses some general algebraic aspects (properties of the space of representations of a group in the neighbourhood of a point, reducibility loci, pseudocharacters), and other aspects more specific to Galois groups of local or number fields. In particular, we define and study certain deformation functors of crystalline representations of the absolute Galois group of $\mathbb{Q}_p$, namely *trianguline deformations*, which are naturally associated to the families above. As an application, we show how the geometry of these eigenvarieties at "classical" points is related to the dimension of certain Selmer groups. This, combined with conjectures of Langlands and Arthur on the discrete automorphic spectrum of unitary groups, allows us to prove, amongst other things, new cases of the Bloch-Kato conjectures (in any dimension).

***Résumé* (Familles de représentations galoisiennes et groupes de Selmer).** — Ce livre présente une étude approfondie des familles de représentations galoisiennes portées par les variétés de Hecke $p$-adiques des groupes unitaires. Cette étude comprend des aspects algébriques généraux (propriétés de l'espace des représentations d'un groupe au voisinage d'un point, lieux de réductibilité, pseudo-caractères), et d'autres plus spécifiques aux groupes de Galois des corps locaux ou des corps de nombres. Nous définissons et étudions notamment certains foncteurs de déformations des représentations cristallines du groupe de Galois absolu de $\mathbb{Q}_p$ (*déformations triangulines*) qui sont naturellement associés aux familles ci-dessus. En guise d'application, nous montrons comment la géométrie de ces variétés de Hecke aux points « classiques » est reliée à la dimension de certains groupes de Selmer. Ceci, conjugué aux conjectures de Langlands et Arthur sur le spectre automorphe discret des groupes unitaires, nous permet entre autres de démontrer de nouveaux cas des conjectures de Bloch-Kato (en toute dimension).

## CONTENTS