L'intelligence qu'il a des relations entre science et société n'a pas retenu Allouche de cette forme de soumission au climat ambiant, si favorable à ceux que lui et moi considérons comme nos adversaires. Je la regrette bien sûr, je n'ose pas espérer qu'il la reprenne, mais je voudrais éviter qu'elle fasse tâche d'huile.

Que dire d'autre aux lecteurs de la *Gazette* ? Peut-être que je crois sentir une vibration chez les jeunes pour tenter de lier leur métier au souci de la chose publique. Pour les jeunes mathématiciens, la SMF est une voie naturelle pour répondre à cette vibration. Le Bureau de la SMF me paraît conscient à la fois des difficultés et des perspectives, je lui fais confiance.

Réflexions sur les mathématiques

Maurice Nivat[1]

Préparant l'agrégation de mathématiques à l'École normale supérieure de la rue d'Ulm dont j'étais élève, j'ai eu une révélation en écoutant Henri Cartan. Une question épineuse était la construction des nombres réels et il y avait deux méthodes traditionnelles pour ce faire, les coupures et les suites de Cauchy. Nous avions entendu deux de mes camarades présenter une leçon longue, laborieuse et ennuyeuse, en utilisant l'une et l'autre de ces méthodes. Et Cartan, mutin, nous avait dit : on peut faire beaucoup plus simple en utilisant les développements décimaux illimités, une fois n'est pas coutume, la semaine prochaine c'est moi qui ferai la leçon. Et ce fut lumineux : il suffit d'identifier $X_nX_{n-1} \dots X_1, Y_1Y_2 \dots Y_p999999999\dots$, développement décimal qui ne contient plus que des 9 à partir d'un certain rang, avec le nombre décimal $X_nX_{n-1} \dots X_1, Y_1Y_2 \dots Y_{p+1}$ pour avoir une représentation des réels et démontrer sans peine que ces réels ont bien toutes les propriétés voulues. C'était simple, c'était bref, c'était évident. J'ai beaucoup pensé à cette leçon au cours de ma vie d'enseignant : les choses se comprennent d'elles-mêmes quand la théorie et la pratique se rejoignent.

À l'inverse j'ai écouté toute une année un cours de Claude Chevalley sur la géométrie algébrique : il y fut question d'anneaux locaux et de l'idéal principal d'un anneau local. Vers la fin de mai, le cours s'achevait, Chevalley à la fin de ce qui était sa dernière leçon nous a dit à peu près textuellement : et bien évidemment cet idéal principal est l'hyperplan tangent à la variété algébrique. Nous l'avons regardé avec des yeux ronds, sauf peut-être le jeune tchèque de notre promotion qui de façon évidente était beaucoup plus doué pour les mathématiques que tous les autres. Gustave Choquet, lui, s'est amusé avec nous : là il s'agissait de topologie générale, cours que nous ne suivions pas, nous déléguions l'un d'entre nous pour savoir ce que disait Choquet, car pour le reste nous lisions Bourbaki. Nous lisions même les quatre volumes de Topologie Générale de Bourbaki avec application en faisant tous les exercices. Le jour de l'examen, nous étions tous là, Choquet nous a tendu une suite de petits problèmes portant sur la connexité : ce fut le désastre. Seul le tchèque a eu la moyenne, un autre a eu six et tous les autres dont moi ayant remis

[1] Professeur honoraire à l'université Paris-Diderot, Membre correspondant de l'Académie des sciences.

copie blanche se sont vu gratifiés de zéro ou un. Choquet riait beaucoup en nous annonçant les résultats et nous a dit : si vous aviez fait un dessin vous vous seriez aperçu que la solution est immédiate, et en moins d'une heure, en traçant quelques patatoïdes censées représenter des ensembles, il nous a convaincus que nous étions en effet idiots. Choquet que j'ai fini par bien connaître en riait encore trente ans plus tard : il avait joué un bon tour à ces normaliens qui croient tout savoir et à ses collègues bourbakistes qui proscrivent les dessins comme s'il s'agissait d'objets pornographiques. Un vrai matheux réfléchit, il ne dessine pas ! Je suis de ceux à qui, en se moquant de nous, Choquet a rendu le meilleur des services en nous poussant vers des domaines que l'esprit bourbakiste n'avait pas encore envahis : mécanique, géométrie, probabilités et pour moi informatique.

Je suis quand même mathématicien, on ne fait pas des mathématiques pendant des années, on ne passe pas l'agrégation de mathématiques, on n'obtient pas un doctorat ès Science Mathématique impunément, mais je suis en désaccord avec beaucoup de mathématiciens, non pas sur la beauté ou l'utilité de cette science, mais sur plusieurs points essentiels à mes yeux.

La mathématique n'est pas plus « noble » qu'une autre science. Un débat aussi vieux qu'elle n'a jamais été tranché : les nombres que l'on dit naturels le sont-ils vraiment ? Personne n'a jamais vu un nombre, ne s'est heurté à un nombre au détour d'un sentier. Peut-être les nombres n'existent-ils pas vraiment et sont-ils seulement une construction de l'esprit ? J'ai tendance à penser qu'ils existent au moins autant que les forces ou les poids : on ne les voit pas mais on les sent, on sait qu'avec quatre petits pois on ne sera pas nourri mais qu'on le sera avec quatre pommes de terre. On sait que tout seul on n'arrivera pas à déplacer une commode mais qu'à trois ou quatre on pourra sans doute. Mais en fait, peu importe que les nombres existent ou non dans la nature, comme les notions de force et de poids, la notion de nombre est utile pour rendre compte de phénomènes naturels, eux tout à fait observables, et les nombres ne sont ni plus ni moins abstraits que les forces et les poids. Raisonner sur les nombres n'utilise pas d'autres mécanismes que la raison commune, que la logique ordinaire, ce que le Grand Arnault et Pierre Nicolle appelaient « l'art de penser ». Toutes les pensées sont nobles quand elles ne sont pas spécieuses, fausses ou fallacieuses. Et la justesse, la « vérité » d'un énoncé est en mathématique comme dans tous les autres domaines une affaire de consensus, n'est pas vrai ce qu'une large majorité de gens croient vrai, mais seulement ce qui est démontré être vrai. Est faux ce dont le contraire est démontré être vrai, en général par l'exhibition d'un contre-exemple. Une démonstration mathématique est réputée valide si les gens susceptibles de la comprendre n'y trouvent pas de défaut.

Les mathématiciens qui défendent souvent avec brio leur discipline ont tendance à confondre l'intuition mathématique avec le métier de mathématicien, et nul ne peut contester qu'il y a eu, qu'il y a encore aujourd'hui des mathématiciens qui ont des intuitions étonnantes, on ne sait pas comment ils font, on se sait pas comment se forment dans leur esprit ces intuitions qui les guident sur des chemins inexplorés et les amènent parfois à des propriétés surprenantes, voire contre-intuitives, ou à résoudre des questions ouvertes depuis des décennies, voire des siècles. Comme tout le monde je ne peux que m'incliner devant les génies mathématiques qui ont de telles intuitions, en constatant que je suis bien incapable d'avoir les mêmes, et je suis plein d'admiration et de respect pour ces gens-là. Mais ils sont rares et la plupart des mathématiciens, qu'ils enseignent, qu'ils travaillent avec d'autres scientifiques, qu'ils vendent leur savoir contre salaire (comme un vulgaire plombier), ne font qu'exercer le métier de mathématicien qu'ils sont censés avoir appris sur les bancs des écoles et des universités. Ils sont bons s'ils sont efficaces et la noblesse de leur action ne se distingue pas de la noblesse du travail bien fait quel que soit celui-ci.

Je pense que mon deuxième reproche est une conséquence directe de la croyance des mathématiciens en une noblesse particulière de leur discipline : il s'agit de leur réticence manifeste à écrire qu'il y a quelque chose qu'ils ne savent pas faire, sauf à énoncer des conjectures, ce qu'ils ne font que quand ils sont raisonnablement sûrs que personne ne va immédiatement pouvoir démontrer ou infirmer leur conjecture. Ils ne disent pas davantage quels efforts infructueux ont précédé le dernier qui s'est révélé être le bon. Ils font même pire : bien souvent ils masquent complètement le cheminement qui les a conduits au résultat annoncé et attendent d'avoir trouvé une façon moins tortueuse de parvenir au résultat. De fait, ce qu'ils masquent c'est le travail réellement effectué, le long, le souvent fastidieux travail qui a fini par aboutir au résultat, le découragement qui a pu les saisir à certains moments quand ils se sont retrouvés dans des impasses : ce qu'ils veulent c'est que l'on croit que la puissance de leur cerveau les dispense de ce qui fait l'essence de quatre-vingt-dix-neuf pour cent de la recherche scientifique : le tâtonnement et l'obstination. Cent fois sur le métier remettez votre ouvrage, disait Boileau, qui n'était pas mathématicien. Cela allait chez des matheux que j'ai bien connus jusqu'à tenter de faire croire à leur entourage qu'ils travaillaient fort peu, ils se cachaient la nuit pour travailler. Et cela est désastreux pour l'enseignement, cela accrédite l'idée que ceux qui réussissent en mathématiques ont quelque chose que les autres n'ont pas, la fameuse « bosse des maths » ou un esprit « supérieur » engendrant ainsi un cruel défaitisme chez ceux qui ne comprennent pas tout de suite, qui ont du mal à suivre ou qui doivent beaucoup travailler pour ce faire. La mathématique n'est pas lisse, ce n'est pas le jardin enchanté où des gens particulièrement doués cueillent sans effort des fleurs magnifiques aux parfums enivrants, c'est comme toute science un monde plein de mystères et d'aspérités, où les choses marchent rarement comme on le voudrait et où l'on se fraye difficilement son chemin.

Des textes récents de mathématiciens pour les quels, par ailleurs, je nourris la plus grande estime parus dans la grande presse m'amènent à penser que ces gens éminents poursuivent une chimère et sont prêts à faire quelques entorses à la vérité lors de cette poursuite : je lis que le langage mathématique est le mieux adapté à décrire les phénomènes qui nous entourent. Dieu, a dit Galilée, a écrit le monde en langage mathématique. Et, malheureusement, je ne crois pas à l'unicité du langage mathématique, ni d'ailleurs à ce que Jean-Pierre Serre appelait « l'unité » de la mathématique. Ce que Galilée appelait langage mathématique est bien différent de ce que l'on pourrait appeler le langage mathématique aujourd'hui : au moins aussi différent que l'est le français des chansons de geste du français d'aujourd'hui. Et j'ai connu de mon vivant d'étudiant deux extraordinaires mutations du langage mathématique avec l'apparition de la topologie générale, le langage des ouverts et des fermés qui remplaçaient les epsilons coupés en petits morceaux et l'algèbre linéaire avec la notation vectorielle et matricielle qui changeait tout de ce que j'avais appris en hypotaupe sur les fameux déterminants, (en taupe mon cher professeur à qui je dois tant, Pougnand, dit Le Pou, a fait deux fois le cours sur les déterminants, à la manière traditionnelle d'abord où les déterminants étaient des tableaux carrés sur lesquels on se livrait à de mystérieuses transformations, et la façon moderne qui les associaient à des endomorphismes d'espaces vectoriels : il avait besoin de se persuader qu'il parlait bien les deux fois du même objet !). Toute mon expérience est que le langage qu'emploient les mathématiciens d'une part évolue très vite, et d'autre part est sensiblement différent d'une branche de la mathématique à l'autre, au point que les spécialistes de ces diverses branches ont bien du mal à se comprendre. Le rêve de pouvoir embrasser toute la mathématique est un rêve de plus en plus fou, inaccessible et irréalisable quand on considère que la production de « théorèmes » fait qu'il s'en produit plus aujourd'hui en un an qu'il n'en a été produit au cours de plusieurs siècles passés.

Le plus brillant et le plus chevronné des mathématiciens ne sait pas tout, ce que bien sûr on ne saurait lui reprocher : ce que l'on peut déplorer c'est qu'il ait du mal à avouer cette évidence. Des choix ont été opérés dans l'enseignement des mathématiques en France qui font que la communauté des mathématiciens français, bien que riche de nombreux mathématiciens de très grand talent, n'excelle pas dans tous les chapitres des mathématiques, on peut même dire qu'il y a des chapitres dans lesquelles elle est cruellement absente ainsi qu'en témoigne la bibliographie de traités classiques et récents. Il en va ainsi de la géométrie combinatoire essentiellement la théorie des polytopes de R^n tels que définis par un système d'inéquations linéaires (ah, là, là : j'utilise le mot d'inéquation qu'utilisent quelques millions de personnes mais qui est proscrit en France par un étrange oukase académique) : l'ouvrage de Günter Ziegler, Lectures on Polytopes, dans la collection des graduate texts in mathematics de Springer (paru en 1994) mentionne quatre articles écrits par des français dans une bibliographie de près de cinq cents titres. On cherche tout aussi désespérément des contributions françaises dans le Handboolk of convex geometry publié par North Holland en 1993. Vous allez me dire qu'on peut se passer de géométrie combinatoire, puisque cette absence n'empêche pas la France de récolter un nombre de médailles Fields très supérieur à ce qu'il devrait être s'il était proportionnel à son poids démographique. Malheureusement il s'agit d'un domaine où les mathématiques servent tous les jours à des milliers d'entreprises à établir des emplois du temps, à configurer des réseaux de transport, à gérer de grands chantiers ce qui contraste singulièrement avec l'affirmation que « le monde est mathématique » défendue ou plutôt proclamée dans les colonnes du journal Le Monde : comment un domaine où, précisément les mathématiques se sont révélées plus qu'utiles, indispensables, peut-il être ignoré par les mathématiciens français ?

Passe encore que tous fassent autre chose, la mathématique est vaste, mais le fait est que cette ignorance se traduit par le fait que toute la mathématique liée à la géométrie convexe et aux polytopes est très peu enseignée sur le territoire national : la programmation linéaire, l'algorithme du simplexe et plus généralement tout ce qui relève de ce que l'on appelle la recherche opérationnelle sont réduits à la portion la plus congrue dans nos universités et écoles d'ingénieurs, ce qui évidemment n'est pas de nature à réduire cette ignorance.

On croit rêver : la mise sur pied du système de velib dans les rues de Paris, présentée par la mairie de la capitale comme une de ses grandes œuvres et largement plébiscitée par la population, repose sur la mathématique nécessaire pour prévoir le réapprovisionnement permanent des stations de velib. Les utilisateurs ont tendance à ne pas les prendre au même endroit que celui où ils les ont laissés et il faut constamment en transporter d'une station à l'autre, Paris est sillonné de camions qui font ça. Et ce réapprovisionnement est régi par des algorithmes reposant sur des statistiques fines concernant les flux de demandes de velib, en fonction de l'heure et du lieu et sur la géométrie combinatoire. Et voilà une victoire incontestée de la mathématique que personne ne connaît et dont on se garde bien de parler aux jeunes qui se demandent à quoi peut bien servir l'équation du second degré.

Des exemples comme celui-ci, il y en a beaucoup, de l'imagerie médicale, reposant beaucoup sur la tomographie, petite branche bizarre de la mathématique, le calage des caméras permettant à un robot ou à la main du chirurgien de saisir quelque chose, les courbes de Béziers si utiles pour dessiner les carrosseries de voiture et les fuselages d'avion en sont d'autres et la mathématique nécessaire n'est ni facile ni triviale et je crois qu'il serait plus facile de faire sentir aux jeunes de terminale S l'utilité ou la nécessité de la mathématique en leur parlant de ces acquis récents de la technique que du grand théorème de Fermat ou du programme de Langlands (dont je pense on ne leur parle pas non plus). Je crois que ce qui manque aux mathématiques en France, et entraîne la désaffection pour cette discipline et la chute des effectifs, c'est de montrer la mathématique en action, non pas en action pour s'enrichir elle-même (de toute façon on le sait le nombre de gens qui feront vraiment progresser la science mathématique est fort limité) mais en action comme outil dans une entreprise technique, c'est d'avoir l'humilité de se présenter aux yeux du plus grand nombre comme ce qu'elle est, un outil intellectuel qui comme tout outil a son champ d'action et ses limites et ne vaut pas grand-chose s'il n'est associé à d'autres. La mathématique de l'ingénieur ou du technicien d'aujourd'hui ne peut plus être celle qu'elle était au milieu du vingtième siècle dominée par l'analyse, des développements limités aux fonctions continues et dérivables, qui sous-tendait la mécanique, qui, elle, régnait alors sur l'industrie. Cette mathématique qui constitue encore l'essentiel du programme des classes préparatoires aux grandes écoles continue d'être indispensable à toute l'industrie mécanique, mais l'importance de la mécanique dans l'industrie a beaucoup diminué. L'innovation technique, celle qui assure le succès industriel, prend sa source principale ailleurs, elle alimente et elle demande une mathématique substantiellement différente de plus en plus discrète et de moins en moins continue : cela ne diminue en rien la grandeur de Newton et de Cauchy ni la beauté de ce que l'on appelle le calcul différentiel et intégral. Cette innovation repose pour beaucoup sur la possibilité de manipuler des quantités considérables de données, grâce à la puissance stupéfiante des ordinateurs, tout comme de simuler des phénomènes naturels qui ne se laissent facilement ni mettre en équation ni observer en modèle réduit, elle est beaucoup plus dynamique que statique.

Un des grands problèmes du moment où j'écris ces lignes est la gestion des grands programmes informatiques qui font de plus en plus souvent plus d'une centaine de millions de lignes de code. Pour les maîtriser, comme nous l'a enseigné Descartes, il faut arriver à les découper en morceaux plus petits (appelez-les comme vous voudrez, modules par exemple) que l'on sait écrire, et vérifier et qu'il ne reste plus qu'à assembler en s'assurant que l'ensemble tient debout, que les divers modules ne réagissent pas les uns sur les autres entraînant des effets non voulus et pervers. Le