PANORAMAS ET SYNTHÈSES 11

NOUVEAUX INVARIANTS EN GÉOMÉTRIE ET EN TOPOLOGIE

Michèle Audin
John W. Morgan
Pierre Vogel

avec une postface de

Daniel Bennequin

édité par François Dumas, Jean-Yves Le Dimet, Sylvie Paycha

Société Mathématique de France 2001
Publié avec le concours du Centre National de la Recherche Scientifique

M. Audin
Institut de Recherche Mathématique Avancée, Université Louis Pasteur et CNRS, 7 rue René Descartes, 67084 Strasbourg cedex, France.
E-mail : Michele.Audin@math.u-strasbg.fr
Url : http://www-irma.u-strasbg.fr/~maudin

J.W. Morgan
Department of Mathematics, Columbia University, New York, NY 10024 USA.
E-mail : jm@math.columbia.edu
Url : www.math.columbia.edu/~jm

P. Vogel
Université Paris 7, 2 place Jussieu, 75251 Paris Cedex 05.
E-mail : vogel@math.jussieu.fr
Url : http://www.math.jussieu.fr/~vogel/

D. Bennequin
Institut de mathématiques de Jussieu, Université de Paris 7, 4, place Jussieu, 75252 Paris cedex 05.

F. Dumas
LMP, Université Blaise Pascal, 63177 Aubière cedex.
E-mail : francois.dumas@math.univ-bpclermont.fr

J.-Y. Le Dimet
LMP, Université Blaise Pascal, 63177 Aubière cedex.
E-mail : jy.ledimet@math.univ-bpclermont.fr

S. Paycha
LMA, Université Blaise Pascal, 63177 Aubière cedex.
E-mail : sylvie.paycha@math.univ-bpclermont.fr
Url : wwwlma.univ-bpclermont.fr/~paycha

***Classification mathématique par sujets* (2000).** — 5302, 8102, 53D, 53C23, 57M25, 57M27, 57R57, 58J.

Mots clefs. — Variétés symplectiques, courbes holomorphes, invariants de Seiberg-Witten, variétés de dimension 4, variétés de dimension 3, nœuds, invariants de type fini, théorie quantique des champs, dualité.

NOUVEAUX INVARIANTS EN GÉOMÉTRIE ET EN TOPOLOGIE

Michèle Audin, John W. Morgan, Pierre Vogel
avec une postface de Daniel Bennequin
édité par François Dumas, Jean-Yves Le Dimet, Sylvie Paycha

Résumé. — Ce volume traite des développements récents de trois types d'invariants géométriques :
– invariants symplectiques, dont les invariants de Gromov-Witten présentés par Michèle Audin,
– invariants de variétés de dimension 4 avec la théorie de Seiberg-Witten par John Morgan,
– invariants de type fini pour les variétés de dimension 3 décrits par Pierre Vogel.
Les liens entre ces trois classes d'invariants et la théorie des champs contemporaine sont abordés dans une postface de Daniel Bennequin.

***Abstract* (New Invariants in Geometry and Topology).** — This volume offers a presentation of recent developments of three types of geometric invariants:
– symplectic invariants, including Gromov-Witten invariants, by Michèle Audin,
– invariants of four-manifolds and Seiberg-Witten theory, by John Morgan,
– finite type invariants for three-manifolds, by Pierre Vogel.
As a conclusion to this volume, Daniel Bennequin describes the links between these three types of invariants and contemporary quantum field theory.

TABLE DES MATIÈRES

Postface

RÉSUMÉS DES ARTICLES

Dans ce texte, je survole le problème des invariants des variétés symplectiques en m'attachant particulièrement à ceux qu'on obtient en « comptant » les courbes pseudo-holomorphes, les invariants de Gromov-Witten.

Ces dernières années ont vu l'introduction de plusieurs invariants des variétés, invariants définis à l'aide des espaces de modules de certaines équations aux dérivées partielles. Il y a parmi ceux-ci les équations d'anti-autodualité et les invariants de Donaldson, les équations des courbes pseudo-holomorphes et les invariants de Gromov-Witten, et les équations de Seiberg-Witten et les invariants associés. Ces derniers sont le sujet de cet article. Nous commençons par développer les résultats fondamentaux qui sont nécessaires, puis nous définissons les invariants. Finalement, nous donnerons quelques applications aux variétés symplectiques et kählériennes.

Il existe de nombreux invariants de Vassiliev (ou de type fini) des nœuds et des entrelacs. L'intégrale de Kontsevich est, en quelque sorte, l'invariant de type fini universel. Il prend ses valeurs dans un module de diagrammes $\mathcal{A}(\Gamma)$, Γ étant l'entrelacs considéré comme une courbe abstraite.
Il existe aussi des théories des invariants de type fini pour les variétés de dimension 3. Elles sont toutes plus ou moins équivalentes. La théorie de Kirby permet de décrire les variétés de dimension 3 à l'aide d'entrelacs. On peut alors extraire de l'intégrale de Kontsevich un invariant de variété de dimension 3. Lorsque la variété est une sphère d'homologie, cet invariant est l'invariant de type fini universel. Il prend ses valeurs dans le module de diagrammes $\mathcal{A}(\varnothing)$.

Le texte se propose de présenter à des mathématiciens (ou à des étudiants en mathématiques) l'origine des dualités en théorie quantique des champs et en théorie des cordes (renormalisation, supersymétrie...), et d'expliquer comment ces dualités font apparaître de nouveaux invariants en topologie différentielle.

ABSTRACTS

In this survey, I discuss the problem of finding invariants for symplectic manifolds. I emphasize on the invariants that "count" holomorphic curves, namely on the Gromov-Witten invariants.

Recent years have seen many new invariants of manifolds, invariants defined using moduli spaces of solutions to certain partial differential equations. These include the anti-self-dual equations and Donaldson invariants, the pseudo-holomorphic curve equations of Gromov and the resulting Gromov and Gromov-Witten invariants, quantum cohomology, various Chern-Simon's invariants, Floer homology, and, the subject of this article, the Seiberg-Witten invariants. We cover the background necessary to define these invariants, give the definition, and then several applications to the topology of smooth four-manifolds including to symplectic four-manifolds and complex algebraic surfaces.

There exist many Vassiliev (or finite type) invariants for knots or links. The Kontsevich integral is, in some sense, the universal finite type invariant. It takes values in a module of diagrams $\mathcal{A}(\Gamma)$, where Γ is the link considered as an abstract curve.
There is also finite type invariants theories for 3-dimensional manifolds. They are essentially equivalent. Using Kirby calculus, every 3-dimensional manifold may be described by links. So it is possible to extract from the Kontsevich integral an invariant of 3-dimensional manifold. If the manifold is a homology sphere, this invariant is the universal finite type invariant of the manifold. It takes values in the module of diagrams $\mathcal{A}(\varnothing)$.

In this text we will present for mathematicians (or students in mathematics) the origin of dualities in Quantum Field Theory and String Theories (renormalization, supersymmetry, ...), and will explain to explain how these dualities are the source of new invariants in Differential Topology

INTRODUCTION

Les textes publiés dans ce volume correspondent à trois cours et un exposé présentés lors des journées « États de la Recherche » qui ont réuni une soixantaine de participants du 15 au 18 septembre 1999 à l'Université Blaise Pascal (Clermont-Ferrand 2)[1]

Le projet d'organiser ces journées est né au sein du groupe de travail « Géométrie, Topologie, Analyse fonctionnelle » qui rassemble depuis quelques années des chercheurs des deux laboratoires de mathématiques de l'Université Blaise Pascal. Dans la diversité des centres d'intérêt (de la géométrie différentielle aux variétés de petite dimension, des algèbres d'opérateurs aux groupes quantiques) et dans les différences de problématiques (des origines physiques aux méthodes algébriques, homologiques ou de représentation), apparaissait un type de démarche mathématique présentant des points communs parmi lesquels le rôle central joué par la mise en évidence de certains invariants. Lorsque nous avons souhaité inscrire dans le développement de ce groupe de travail l'organisation de journées États de la Recherche, c'est assez naturellement autour de ce thème que nous les avons envisagées.

De plus, la période nous semblait propice. Sorti chargé d'histoire de sa période classique (essentiellement le XIX-ème siècle), le terme même d'invariant avait au XX-ème siècle connu bien des glissements, passant des objets mathématiques aux symétries de ces objets, puis voyant les symétries s'estomper à leur tour au profit de l'invariant en tant qu'objet. Il nous paraissait pertinent de présenter un « état des lieux » de certains développements récents de la notion d'invariant en partie impulsés par les idées de la physique contemporaine.

[1] Ces journées ont été organisées conjointement par le Laboratoire de Mathématiques Pures (E.A. 986) et le Laboratoire de Mathématiques Appliquées (U.M.R. 6620) de l'Université Blaise Pascal, dans le cadre d'une école thématique du C.N.R.S. et de journées États de la Recherche de la S.M.F., avec le soutien financier du Ministère de l'Éducation Nationale de la Recherche et de la Technologie, du C.N.R.S., de l'Université Blaise Pascal, et de la région Auvergne. Que tous en soient ici remerciés.

Les trois chapitres suivants traitent d'invariants au sens classique où l'entendait Felix Klein dans le programme d'Erlangen, soit d'objets qui restent invariants sous l'action d'un groupe : le groupe des symplectomorphismes d'une variété symplectique dans le cas des invariants de Gromov-Witten, le groupe des difféomorphismes d'une variété de dimension 4 dans le cas des invariants de Seiberg-Witten, et le groupe des homéomorphismes d'une variété de dimension 3 dans le cas des invariants de type fini. Le premier chapitre (Michèle Audin) montre comment les invariants de Gromov-Witten dans le cadre des variétés symplectiques conduisent aux invariants de Seiberg-Witten en dimension 4. Le second (John Morgan) donne une construction à partir de théories de jauge de ces invariants de Seiberg-Witten. Finalement, l'invariant de Casson, qui peut aussi s'obtenir dans le cadre de la théorie de Seiberg-Witten, apparaît dans le troisième chapitre (Pierre Vogel) comme un invariant de type fini. Les liens qui unissent ces différents invariants et qui peuvent surprendre à première vue, s'expliquent assez naturellement par une brève incursion historique dans la théorie des champs. Ils sont pour la plupart de nature heuristique, établis par le biais de l'intégrale de Feynman, mais méritent malgré tout d'être notés car ils semblent porteurs de développements futurs autour de la notion d'invariant comme le suggère Daniel Bennequin dans la postface de cet ouvrage.

Les trois types d'invariants que l'on rencontre dans ce recueil ont en commun de pouvoir s'interpréter (au moins formellement) en termes de fonctions de corrélation. Entendons par fonction de corrélation une « intégrale de chemins » donnée par un objet formel du type

$$\langle O_1 \cdots O_k \rangle := \int_\Gamma \mathcal{D}\gamma\, e^{-\int \mathcal{L}(\gamma(x))\, d\,\mathrm{vol}(x)} O_1(\gamma) \cdots O_k(\gamma).$$

L'espace Γ sur lequel se fait l'intégration n'est pas un espace de « chemins » au sens propre du terme mais plutôt un espace de « champs » γ. Ces champs peuvent être des sections d'un fibré sur une variété sous-jacente M (par exemple une section d'un fibré spinoriel), des connexions sur un fibré principal basé sur M (dans une théorie de jauge, le champ est typiquement une connexion et le groupe de structure du fibré principal s'appelle le groupe de jauge) ou bien des applications d'une variété Σ vers une variété M (dans un modèle sigma par exemple). Dans ces trois cas, c'est la variété M sur laquelle on veut définir des invariants.

L'intégration sur l'espace des champs se fait à l'aide d'une mesure de volume formelle $\mathcal{D}\gamma$ sur Γ, l'intégrande étant formée d' « observables » $O_i : \Gamma \to \mathbb{C}$, $1 \leqslant i \leqslant k$. Le lagrangien $\mathcal{L}$ est une fonction sur l'espace des jets d'un certain ordre des éléments γ de Γ qui est intégrée par rapport à une mesure de volume ordinaire $d\,\mathrm{vol}(x)$ (sur Σ dans le cas du modèle sigma, sur M dans les deux autres cas) pour donner l'action $\mathcal{A}(\gamma) := \int \mathcal{L}(\gamma(x))\, d\,\mathrm{vol}(x)$.

Le modèle est dit supersymétrique lorsque l'action est invariante par les transformations supersymétriques qui échangent bosons et fermions. Il est peut-être suffisant ici – pour reprendre les termes de Michael Atiyah[2] – de voir les théories de champs supersymétriques comme des constructions conduisant (formellement) à une géométrie différentielle sur certaines variétés de dimension infinie, ceci étant un point de vue naturel depuis les travaux de Witten faisant un usage géométrique de la supersymétrie[3].

Certains lagrangiens ont pour particularité de donner lieu à des fonctions de corrélation indépendantes du choix de la métrique sur la variété sous-jacente, propriété qui caractérise ce qu'on appelle depuis une théorie topologique des champs, notion que Michael Atiyah a axiomatisée[4], adaptant les axiomes proposés par Segal pour une théorie conforme des champs[5]. Cette interprétation physique des objets mathématiques que sont les invariants s'est petit à petit dégagée grâce aux travaux de physiciens, et en particulier à ceux d'Edward Witten.

Dans les années 80, Michael Atiyah proposa[6] une théorie des champs non relativiste (*i.e.* la variable temps y joue un rôle différent de celui des variables d'espace) éclairant sous un jour nouveau des résultats intéressants pour la topologie de dimension 3 dûs à Andreas Floer[7]. À la suite de ces travaux, Michael Atiyah suggéra deux problèmes aux théoriciens des champs quantiques : donner une interprétation physique (certainement relativiste) de la théorie de Donaldson qui fournit des invariants de structures C^∞ en dimension 4 d'une part, chercher une définition intrinsèque du polynôme de Jones de la théorie des nœuds d'autre part qui donne lieu à des invariants de structures topologiques en dimension 3.

Edward Witten répondit[8] par l'affirmative à la première question en proposant une interprétation des invariants de Donaldson comme fonctions de corrélation d'une théorie des champs $SU(2)$ (*i.e.* le groupe de jauge est $SU(2)$) supersymétrique tordue (ceci signifiant une entorse à la règle spin-statistique), la variété sous-jacente M étant de dimension 4. Ces fonctions de corrélation sont de la forme :

$$Z(k) = \langle O_1 \cdots O_k \rangle, \qquad O_i := \int_{c_i} W_i,$$

W_i étant une forme différentielle de degré n_i définie en termes de champs de la théorie et c_i un cycle d'homologie de dimension n_i sur la variété. Bien que ces fonctions de corrélation soient des objets formels, Witten parvint à en extraire des formules explicites des invariants de Donaldson comme intégrales (ordinaires cette fois) sur l'espace

(2) « Topological Quantum Field Theories » in René Thom Festschrift (1989)
(3) « Supersymmetry and Morse Theory », Journ. Diff. Geom. 17 (1982)
(4) voir note 2
(5) « Two-dimensional conformal field theory and modular functors », IXth Internat. Conf. Math. Phys. Swansey, Adam Hilger 1989
(6) « New invariants of three- and four-manifolds » in « The mathematical heritage of Hermann Weyl », Proc. Symp. Pure Math., Vol 48, Amer. Math. Soc. 1988
(7) « Morse Theory for Fixed Points of Symplectic Diffeomorphisms », Bulletin A.M.S. n.16 (1987)
(8) « Topological Quantum Field Theory », Comm. Math. Phys. 1988

des modules des instantons. La théorie des invariants de Donaldson et leurs interprétations physiques devaient ensuite connaître des rebondissements grâce à des travaux de Nathan Seiberg et Edward Witten, développements sur lesquels nous reviendrons et qui font l'objet du chapitre 2 de cet ouvrage.

À la deuxième question posée par Atiyah concernant cette fois les invariants de nœuds, Witten répondit encore par l'affirmative[(9)] en décrivant le polynôme de Jones comme fonction de corrélation, la variété sous-jacente étant cette fois de dimension 3 et le lagrangien dit de Chern-Simons étant donné par :

$$\mathcal{L}_{CS} = \frac{i}{4\pi}\operatorname{Tr}(A \wedge dA + \tfrac{2}{3} A \wedge A \wedge A),$$

où $d + A$ est la forme locale d'une connexion sur un fibré vectoriel (de groupe de structure G quelconque) basé sur la variété sous-jacente. Encore une fois, il s'agit d'une théorie topologique dont les fonctions de corrélation sont liées à des invariants de nœuds traités dans le chapitre 3 de cet ouvrage.

Dans la discussion qui précède, nous avons passé sous silence un protagoniste de taille, la constante de couplage qui peut s'avérer indispensable pour relier fonctions de corrélations et invariants. Des constantes de couplage sont déjà présentes dans les deux théories mentionnées ci-dessus et pour bien faire, il faudrait écrire le lagrangien de Witten donnant lieu aux invariants de Donaldson sous la forme $\mathcal{L}/e^2$ et remplacer le lagrangien de Chern-Simons $\mathcal{L}_{CS}$ par $\frac{1}{h}\mathcal{L}_{CS}$, e et h étant les constantes de couplage. La méthode de la phase stationnaire redonne les solutions classiques en passant à la limite $e \to 0$ et $h \to 0$, celles-ci correspondant aux instantons dans le premier cas et aux connections plates dans le deuxième. Dans le premier cas, bien que les invariants construits à partir de ce lagrangien soient indépendants du choix de la constante de couplage e, c'est elle qui jouera un rôle prépondérant dans ce qui suit. Dans le cas du lagrangien de Chern-Simons, les coefficients du développement asymptotique de certaines fonctions de corrélation autour de $h = 0$ sont directement liés à l'intégrale de Kontsevich et donc aux invariants de Vassiliev.

L'idée de V.A. Vassiliev était au départ (1989) d'étudier les invariants de nœuds de la façon suivante : on considère l'espace de toutes les applications différentiables du cercle S^1 dans $\mathbb{R}^3$. L'espace des nœuds est le complémentaire dans cet espace de la partie non générique (ou ensemble des nœuds singuliers), appelée aussi « discriminant ». L'étude de la topologie du discriminant permet – au moyen de la dualité d'Alexander – d'obtenir des informations sur l'espace des nœuds. Par la suite, J. Birman et X-S. Lin ont donné une définition directe des invariants de Vassiliev en terme de nœuds singuliers et prouvé que la plupart des invariants connus sont des invariants de Vassiliev. Puis M. Kontsevich, inspiré par la théorie des graphes de Feynman, a construit une intégrale – appelée depuis intégrale de Kontsevich – qui constitue en

[(9)] « Quantum Field Theory and the Jones Polynomial », Comm. Math. Phys. 121 (1989) quelque sorte l'invariant de Vassiliev universel. Ces travaux ont été améliorés par Dror Bar-Natan qui donne[(10)] la définition heuristique suivante : « An invariant V is called (*a Vassiliev invariant*) of type m if its $(m+1)$st derivative vanishes ». En utilisant les idées évoquées ci-dessus et le « calcul de Kirby », T.T.Q. Le, J. Murakami et T. Ohtsuki ont construit[(11)] une intégrale de Kontsevich pour les variétés de dimension 3, permettant ainsi d'étendre à ces variétés la notion d'invariant de type fini ; ceci fait l'objet du chapitre 3 de ce volume, dû à Pierre Vogel.

Un des problèmes rencontrés en théorie des champs quantiques est de faire des prédictions raisonnables pour des théories de jauge non abéliennes (*i.e.* le groupe de structure G est non abélien) lorsque le couplage est fort, autrement dit, lorsqu'on ne peut raisonnablement pas faire des développements de Taylor en le paramètre de couplage (par exemple la constante e ci-dessus) parce que celui-ci est de taille non négligeable. C'est à partir de ses travaux[(12)] avec Nathan Seiberg sur la théorie supersymétrique $N = 2$ en dimension 4 qu'Edward Witten a ensuite proposé[(13)] une autre approche des invariants de Donaldson qui a donné lieu à la théorie appelée depuis « de Seiberg-Witten », présentée par John Morgan dans le deuxième chapitre de ce volume. Witten proposa d'étudier la théorie des champs « duale », qui contrairement à la théorie initiale, offre l'avantage d'être faiblement couplée (une grande constante de couplage e se transforme en une petite constante de couplage $1/e$) ce qui permet de la traiter perturbativement (*i.e.* par le biais de développements de Taylor en la constante de couplage). Les concepts de « dualité » de « couplage faible, fort » mettent en jeu les procédés de renormalisation que Daniel Bennequin décrit plus en détail dans la postface de ce volume.

L'histoire se prolonge ensuite avec les invariants de Gromov-Witten décrits par Michèle Audin dans le premier chapitre. Ils sont issus d'idées de Gromov sur les courbes pseudo-holomorphes, de Kontsevich sur des espaces de module de surfaces de Riemann[(14)] et de Witten qui là encore pense en terme de fonctions de corrélation[(15)]. Le lagrangien $\mathcal{L}_\sigma$ est ici celui d'un sigma modèle supersymétrique – encore une fois il s'agit d'un modèle topologique – défini sur les applications $\phi : \Sigma \to M$ d'une surface de Riemann Σ vers une variété M. Les fonctions de corrélations correspondent à des

---

(10) « On the Vassiliev knot invariants », Topology 34 (1995)

(11) « On a universal perturbative invariant of 3-manifold » Topology 37 (1998)

(12) « Electric-magnetic duality, monopole condensation and confinement in $N = 2$ supersymmetric Yang-Mills theory », Nucl. Physics B 426 (1994)

(13) « Monopoles and four-manifolds », Math. Research Letters 1 (1994)

(14) « Gromov-Witten classes, Quantum cohomology, and enumerative geometry », Maxim Kontsevich et Yuri Manin, Comm. Math. Phys. (1994)

(15) « Two-dimensional gravity and intersection theory on moduli space », Surveys in Differential Geometry (1991)