PANORAMAS ET SYNTHÈSES 9

PROBLÈMES DE PETITS DIVISEURS DANS LES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

Walter Craig

Société Mathématique de France 2000
Publié avec le concours du Centre National de la Recherche Scientifique

W. Craig
Department of Mathematics and Statistics, McMaster University, Hamilton, Ontario L8S4K1, Canada.
E-mail : `craig@math.mcmaster.ca`

***Classification mathématique par sujets* (2000).** — 35, 37.

Mots clefs. — Équations aux dérivées partielles, systèmes hamiltoniens, petits diviseurs.

Dédié à la mémoire de T. B. Benjamin, R. Bikbaev et T. Gedrich, tragiquement décédés durant l'été 1995.

PROBLÈMES DE PETITS DIVISEURS DANS LES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

Walter Craig

***Résumé.* —** Beaucoup de problèmes d'équations aux dérivées partielles (EDP) non linéaires qui sont intéressants pour la physique peuvent être posés comme des systèmes d'évolution hamiltoniens. Les équations des ondes non linéaires, de Schrödinger, de Korteweg de Vries, d'Euler en mécanique des fluides en sont les principaux exemples. En complément de la théorie des données initiales, il est naturel de se poser la question de la stabilité des solutions pour tout temps, et de décrire les structures principales qui sont invariantes au cours du temps dans l'espace de phase où ces systèmes sont bien posés. On se propose dans ce volume de Panoramas et Synthèses de développer des prolongements de la théorie Kolmogorov-Arnold-Moser (KAM) des tores invariants pour les EDP, dans le cas où les espaces de phases sont de dimension infinie. Le Panorama commence avec la définition des systèmes hamiltoniens de dimension infinie et présente les exemples principaux. Il passe en revue la théorie classique des solutions périodiques pour les systèmes dynamiques de dimension finie, en insistant sur le rôle joué par les résonances. Il développe ensuite une approche directe de la théorie KAM en dimension infinie, qui est appliquée à certaines EDP. Enfin il présente les méthodes introduites par Fröhlich et Spencer pour le développement de la résolvante, qui jouent un rôle central dans l'approche directe de la théorie KAM. On conclut dans le dernier chapitre par une présentation des développements les plus récents de la théorie.

Abstract **(Small Divisor Problems in Partial Differential Equations)**

Many problems in nonlinear PDE which are of physical significance can be posed as Hamiltonian systems: some principal examples include the nonlinear wave equations, the nonlinear Schrödinger equation, the KdV equation and the Euler equations of fluid mechanics. Complementing the theory of the initial value problem, it is natural to pose the question of stability of solutions for all times, and to describe the principal structures of phase space which are invariant under the flow. The subject of this volume of the Panoramas et Synthèses is the development of extensions of KAM theory of invariant tori for PDE, for which the phase space is naturally infinite dimensional. The Panorama starts with the definition of a Hamiltonian system in infinite dimensions. It reviews the classical theory of periodic solutions for finite dimensional dynamical systems, commenting on the rôle played by resonances. It then develops a direct approach to KAM theory in infinite dimensional settings, applying it to several of the PDE of interest. The volume includes a description of the methods of Fröhlich and Spencer for resolvant expansions of linear operators, as it is a basic technique used in this approach to KAM theory. The final chapter gives a presentation of the more recent developments of the subject.

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE 1

INTRODUCTION

Ce Panorama s'intéresse à une classe de problèmes d'évolution associés à des équations aux dérivées partielles (EDP). Une approche élégante, et souvent même utile, est de décrire ces EDP d'évolution comme des systèmes dynamiques posés dans un espace de phase de dimension infinie. Nous nous intéresserons ici à l'étude des problèmes conservatifs ; le plus souvent, il s'agira d'EDP sous forme de systèmes hamiltoniens.

La théorie classique des systèmes hamiltoniens prend sa source dans la théorie de la mécanique, et elle a été motivée notamment par la mécanique céleste. Un des problèmes fondamentaux de la mécanique céleste est l'étude de la stabilité des orbites des planètes autour du soleil, décrites par le système à n corps. L'analyse formelle des perturbations du système à n corps a fait apparaître des problèmes de convergence, dus aux résonances proches des périodes des planètes, qu'on appelle problèmes des petits diviseurs. Il existe pourtant des cas spéciaux de systèmes hamiltoniens dont nous comprenons l'évolution dans l'espace de phase de façon beaucoup plus précise. Appelés systèmes complètement intégrables, ils possèdent un nombre suffisant de quantités conservées indépendantes, de sorte qu'ils peuvent être intégrés essentiellement explicitement, et souvent en termes d'expressions de caractère algébro-géométrique.

On a réalisé néanmoins que les systèmes complètement intégrables sont très spéciaux dans la classe des systèmes hamiltoniens, en un sens précis. Dans le cas du système à n corps, et pour les systèmes hamiltoniens généraux, la question centrale était toujours l'existence d'un ensemble de mesure positive de solutions qui sont stables uniformément en temps. On a dû attendre l'introduction de la théorie de Kolmogorov, Arnold et Moser (appelée la théorie KAM) dans les années cinquante et soixante, pour qu'il y ait une réponse positive à la question de stabilité, tout au moins pour les perturbations des systèmes complètement intégrables et sous des conditions de non résonance et de non dégénérescence relativement générales. Les constructions de la théorie KAM sont des plongements de tores dans l'espace de phase qui sont invariants par le flot du système, et sur lesquels le flot, décrit dans des coordonnées appropriées, est linéaire. Autrement dit, pour des données sur un des tores invariants, l'évolution du système est quasi-périodique en temps. Ces tores invariants sont les principales structures invariantes par le flot d'évolution, et déterminent certains caractères du flot général du système.

Il existe un rapport direct entre ces développements classiques dans la mécanique hamiltonienne et la théorie moderne des équations aux dérivées partielles. La première indication importante a été découverte dans une suite d'expériences numériques par E. Fermi, J. Pasta et S. Ulam [**22**], concernant un système d'équations différentielles, appelé par conséquent le système FPU. Ce système peut être vu comme une approximation discrète d'une EDP, et il a été considéré avec un nombre fini mais relativement grand de degrés de liberté. Fermi et ses collaborateurs avaient pensé voir une stochastisation du système, sous la forme d'un développement rapide de données relativement simples, vers une évolution dans une classe d'états effectivement aléatoires, possédant la propriété d'équipartition d'énergie parmi tous les degrés de liberté. Au lieu de cela, les expériences numériques montraient plusieurs caractéristiques du comportement quasi-périodique, indiquant la possibilité d'existence de tores invariants pour des systèmes possédant un grand nombre de degrés de liberté grand, voire même infini.

Ce travail a été suivi de la découverte d'un nombre d'EDP physiquement pertinentes, dont certaines, comme l'équation de Korteweg – de Vries ou l'équation de Schrödinger non linéaire, sont en rapport étroit avec le système FPU, peuvent être écrites sous la forme d'un système hamiltonien de dimension infinie, et possèdent un nombre suffisant de quantités conservées indépendantes les rendant complètement intégrables. En particulier, elles possèdent une grande classe de solutions dont l'évolution en temps est presque périodique, et on retrouve donc l'analogue du comportement des solutions quasi-périodiques dans la mécanique classique. Les EDP complètement intégrables sont cependant très spéciales, malgré leur importance et la connaissance très fine que nous avons du flot dans leurs espaces de phase. Plusieurs EDP d'évolution intéressantes ont été établies comme systèmes hamiltoniens, à un nombre infini de degrés de liberté. Comme dans la mécanique classique, il est clair que la plupart de ces EDP ne sont pas des systèmes complètement intégrables. Pendant les vingt dernières années, un certain nombre de résultats d'existence, d'unicité et de régularité des solutions ont été démontrés. Ceux-ci nous ont au moins permis de nous faire une idée relativement précise du problème d'évolution local en temps.

Une question essentielle concernant ces EDP, qui a été posée dès l'introduction de la théorie KAM, est celle du comportement des solutions pour des temps grands, et notamment celle de la construction des principales structures dans l'espace de phase, invariantes par le flot d'évolution. Ici s'impose l'analogie avec les systèmes de la mécanique hamiltonienne en dimension finie. La question est en particulier celle de l'existence des tores invariants analogues à ceux de la théorie KAM, et par conséquent de l'existence d'une classe suffisamment grande de solutions qui sont périodiques, quasi-périodiques et presque périodiques en temps, pour des EDP et d'autres systèmes hamiltoniens possédant un nombre infini de degrés de liberté.

La présente étude se propose d'examiner ces questions. Pendant ces dernières années, plusieurs articles ont été consacrés à différentes versions de la théorie de KAM susceptibles de s'appliquer aux questions d'EDP. Nous voudrions décrire ici ces résultats dont certains sont très récents. Les auteurs principaux en sont J. Bourgain, W. Craig, S. Kuksin, J. Pöschel, et E. Wayne, mais de nombreuses autres contributions seront citées dans le texte. Notre point de départ se placera à un niveau élémentaire, mais nous compléterons toutefois cette exposition de détails plus précis, notamment lorsque nous présenterons notre approche particulière de ce sujet.

1.1. Systèmes dynamiques hamiltoniens

Les solutions sont données par l'opérateur d'évolution, Nous considérerons toujours ici une équation d'évolution qui prendra la forme suivante :

Si B est un espace de Banach, ou même de Hilbert, et si $V(U) \in B$ est un champ de vecteurs sur B, on considère

$$(\partial_t U)(t) = V(U(t)), \qquad U(0) = U_0 \tag{1.1}$$

où la condition initiale U_0 est dans B et, pour tout t dans un intervalle convenable, $U(t)$ appartient à B. Autrement dit, on considère le flot d'évolution $U(t) = \Phi(t, U_0)$ qui, pour les problèmes bien posés dans un espace de phase bien choisi, donne une courbe dans B partant de U_0.

Dans le cas des équations aux dérivées partielles, le champ de vecteurs $V(U)$ n'est pas nécessairement continu, mais il est au moins défini sur un sous-espace $\mathcal{D}(V) \subseteq B$, avec un flot d'évolution comme ci-dessus.

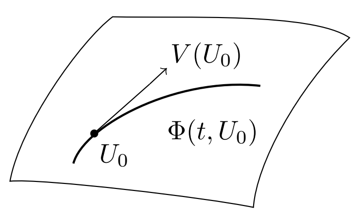

FIGURE 1.1

Comme ce schéma est trop général pour nous permettre d'énoncer des résultats plus profonds, il est préférable de nous restreindre aux EDP qui peuvent être écrites sous forme de systèmes hamiltoniens avec, comme espace de phase, un espace de Hilbert en général de dimension infinie.

La forme générale de ces exemples est très simple. Soit B un espace de Hilbert de fonctions définies sur un domaine S, par exemple un espace de Sobolev ; on désigne par $\langle\cdot,\cdot\rangle$ le produit scalaire $L^2(S)$ et par J un opérateur non dégénéré, antisymétrique. Alors la forme générale de nos exemples est

$$\partial_t U = J \operatorname{grad}_U H(U), \qquad U(0) = U_0 \in B. \tag{1.2}$$

Remarquons que ces systèmes sont maintenant définis par un champ de vecteurs V qui prend la forme particulière : $J \operatorname{grad}_U H$. Il est alors appelé champ hamiltonien associé à la fonction H définie sur B.

Dans ce contexte, la conservation d'énergie est immédiate, c'est-à-dire que la quantité $H(U(t))$ est indépendante de t. Plus précisément, on a

Proposition 1.1. — *Supposons que le flot $\Phi(t, U_0)$ engendré par le champ de vecteurs $J \operatorname{grad}_U H$ soit un groupe de transformations de B bornées (par exemple, si le champ de vecteurs est lipschitzien borné). Alors les solutions de l'équation (1.2) conservent la valeur du hamiltonien H.*

Démonstration. — Soit $U(t) = \Phi(t, U_0) \in B$ la courbe des solutions. Alors

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} H\big(U(t)\big) &= \langle \operatorname{grad}_U H(U), \partial_t U\rangle \\ &= \langle \operatorname{grad}_U H, J \operatorname{grad}_U H\rangle = 0\end{aligned}$$

par antisymétrie de J. □

Ce formalisme hamiltonien se généralise de manière invariante. Sur B, qui peut être un espace de Hilbert, de Banach ou même une variété banachique, supposons qu'on ait une 2-forme *symplectique* $\omega : T_u(B) \times T_u(B) \to \mathbb{R}$, avec les propriétés suivantes :

(1.3)(i) $d\omega = 0$,

(1.3)(ii) ω n'est dégénérée en aucun point de B.

Quand l'espace B est de dimension finie, il est nécessairement de dimension paire. Étant donnée une fonction hamiltonienne $H(u)$, on définit le champ de vecteurs hamiltonien associé $X_H(u)$ dans $T_u(B)$, l'espace tangent de B à u, en imposant que

$$\omega(X_H, Y)(u) = dH(Y)(u), \tag{1.4}$$

pour tout $Y \in T_u(B)$. Quand la dimension de B n'est pas finie, ni les formes ω et dH, ni le champ de vecteurs X_H, ne sont nécessairement bornés ; il faut alors les restreindre à leurs propres domaines de définition. Il y a aussi des situations où l'on doit affaiblir légèrement la condition (1.3)(ii). Dans le cas où B est un espace de Hilbert, la forme symplectique ω a, grâce au théorème de Riesz, une représentation en termes du produit scalaire

$$\omega(X, Y) = \langle X, JY\rangle. \tag{1.5}$$

Inversement, si le point de départ est la donnée d'un opérateur J sur un espace de Hilbert B, qui est non dégénéré antisymétrique, la 2-forme associée via (1.5) satisfait (1.3).

De manière équivalente, on définit le crochet de Poisson entre deux fonctions $F, G \in C^1(B)$ par

$$\{F, G\} = \omega(X_G, X_F). \tag{1.6}$$

Il a la propriété que, si $\{F, G\} = 0$, alors G est conservée par le flot de X_F (voir la preuve de la proposition 1.1) et, compte-tenu de (1.3), il satisfait

$$\begin{aligned} &\{F, G\} = -\{G, F\} && \text{(antisymétrie)} \\ &\{F, \{G, H\}\} + \{G, \{H, F\}\} + \{H, \{F, G\}\} = 0 && \text{(identité de Jacobi).} \end{aligned} \tag{1.7}$$

On dit qu' un sous espace $L \subseteq T_u(B)$ est *isotrope* par rapport à la 2-forme ω, si ω s'annule sur L, autrement dit si $\omega(X, Y) = 0$ pour tout $X, Y \in L$. On dit qu'un sous-espace L est *lagrangien* si il est isotrope et de dimension maximale, au sens que le seul sous-espace isotrope de $T_u(B)$ qui contient L est L lui-même. Une sous-variété M de B est lagrangienne (respectivement, isotrope), si tout espace tangent $T_u(M) \subseteq T_u(B)$ est lagrangien (respectivement, isotrope). Quand B est de dimension $2n$ finie, alors les sous-espaces lagrangiens sont de dimension n et les sous-espaces isotropes sont de dimension $d < n$.

Dans ce texte nous allons discuter un grand nombre d'exemples d'équations aux dérivées partielles qui peuvent s'écrire sous la forme hamiltonienne. Nos favoris sont les suivants :

(i) L'équation des ondes non linéaire.
(ii) L'équation de Schrödinger non linéaire.
(iii) L'équation de Korteweg – de Vries.
(iv) L'équation de Burgers.
(v) Le système de Boussinesq.
(vi) L'équation de Laplace (sur un cylindre).
(vii) Le système de Fermi, Pasta et Ulam.
(viii) L'équation d'Euler des ondes hydrodynamiques.

1.2. Oscillateurs harmoniques

Sans parler immédiatement d'équations aux dérivées partielles explicites, nous considérerons une forme générale de leurs linéarisations autour d'un point d'équilibre (c'est-à-dire un zéro du champ de vecteurs). Une manière d'expliciter les équations linéarisées d'un système hamiltonien est de développer la fonction hamiltonienne autour du point d'équilibre (point critique) en série de Taylor, et de ne garder que les termes quadratiques. Parmi les équations d'évolution ainsi obtenues, on tombera souvent sur un oscillateur harmonique en un nombre infini de variables. C'est le cas pour la plupart des exemples du paragraphe précédent, et nous pourrons comprendre le caractère de leurs solutions en première approximation en étudiant le flot de leurs linéarisations.

Sur l'espace $B = (\ell^2(\mathbb{Z}))^2$, définissons une fonction hamiltonienne quadratique

$$H_2(q,p) = \frac{1}{2}\Big(\sum_k p(k)^2 + \omega^2(k)q(k)^2\Big), \tag{1.8}$$

avec $U = (q(k), p(k))_{k\in\mathbb{Z}} \in B$. Le gradient de H_2 est bien sûr

$$\begin{aligned} \partial_{q(k)} H_2 &= \omega^2(k)q(k) \\ \partial_{p(k)} H_2 &= p(k), \end{aligned} \tag{1.9}$$

et le système hamiltonien associé est alors

$$\begin{aligned} \partial_t q(k,t) &= p(k,t) \\ \partial_t p(k,t) &= -\omega^2(k)q(k,t), \end{aligned} \tag{1.10}$$

ou encore

$$\partial_t \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix} \operatorname{grad}_{(q,p)} H_2. \tag{1.11}$$

Évidemment, c'est un système linéaire, dont les solutions sont données par le flot

$$\Phi(t,(q,p)) = \begin{pmatrix} \cos(\omega(k)t) & \sin(\omega(k)t)/\omega(k) \\ -\omega(k)\sin(\omega(k)t) & \cos(\omega(k)t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q(k) \\ p(k) \end{pmatrix} \Bigg|_{k\in\mathbb{Z}} \tag{1.12}$$

Définition 1.2. — Le point stationnaire $(q,p) = (0,0)$ est dit *elliptique* si toutes les valeurs propres de l'opérateur $J \operatorname{grad} H_2(0,0)$ sont imaginaires pures. Le point stationnaire $(q,p) = (0,0)$ possède un sous-espace invariant A dit *hyperbolique* si A est un sous-espace spectral de l'opérateur $J \operatorname{grad} H_2(0,0)$ associé aux valeurs propres avec partie réelle non nulle.

Il est clair que $U = 0$ est un point elliptique, car le champ de vecteurs provenant de l'équation (1.11) est de la forme

$$\operatorname{diag}_{2\times 2} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2(k) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}.$$

Chaque composante $(q(k,t), p(k,t))$ de la solution (1.12) est bien sûr périodique, de fréquence $\omega(k)$, mais la solution n'est périodique que si toutes les fréquences sont commensurables. Cela veut dire qu'il y a une fréquence ω telle que

$$\omega = \omega(k)/j_k$$

avec $j_k \in \mathbb{Z}$, pour tout $k \in \mathbb{Z}$ tel que $(q_0(k), p_0(k)) \neq (0,0)$.

Génériquement, le système (1.10) n'aura pas de relations de résonance comme celles-ci. Plus généralement, on appelle solution quasi-périodique (ou (QP)) une solution pour laquelle il y a une base finie de fréquences $\omega_1, \dots, \omega_N$ telle que toute composante $(q(k), p(k))$ non nulle satisfasse

$$\begin{aligned}\omega(k) &= \sum_{\ell=1}^{N} \omega_\ell \, j_{\ell k} \qquad & j_{\ell k} \in \mathbb{Z} \\ &= \langle \omega, j_k \rangle & \text{où } j_k \text{ est un multi-indice.}\end{aligned}$$

Autrement, la solution de (1.10) est appelée presque périodique (PP) et elle admet une base de fréquences infinie. De manière équivalente, on peut examiner la restriction d'une fonction quelconque sur B, à une orbite (1.12)

$$f(t) = F((q(k,t), p(k,t))_{k \in \mathbb{Z}}).$$

C'est alors, selon les différents cas mis en évidence, une fonction périodique (P), quasi-périodique (QP) ou presque périodique (PP) de la variable t. Par la théorie de H. Bohr [**4**] des fonctions presque périodiques, on peut la développer sous la forme

$$f(t) = \sum_k \widehat{f}(k) \exp(i\omega(k)t),$$

avec comme base de fréquences respectivement $\{\omega_\ell\}$ simple, finie ou infinie, $\omega(k) = \langle j_k, \omega \rangle$.

On dit qu'il y a une relation de résonance parmi un ensemble de fréquences $\{\omega(k)\}$ s'il existe une suite d'entiers j_k telle que

$$\langle \omega, j \rangle = \sum_k \omega(k) j_k = 0.$$

Cette relation étant de degré 1 en j, elle concerne les rapports entre les réels $\omega(k)$, et on écrit souvent la relation sous la forme $j_1 : j_2 : \cdots : j_m$. Génériquement, une suite de fréquences $\{\omega(k)\}_{k=1}^{\infty}$ ne possède aucune relation de résonance. Quand le système provient d'une EDP, il est plus courant de rencontrer les cas résonnants, pour des raisons de symétrie, de comportement asymptotique des valeurs propres, ou bien de dépendance des paramètres.

Le fait fondamental est que toutes les solutions de l'oscillateur harmonique sont de type (P), (QP) ou (PP). Nous dirons qu'une orbite $\gamma(U_0) = \{\Phi(t, U_0) \ : \ t \in \mathbb{R}\}$ est *récurrente* si sa fermeture $\overline{\gamma(U_0)} \subseteq C(\mathbb{R} : B)$ (pour la topologie de la convergence uniforme sur les compacts de $\mathbb{R}$) est compacte. En comparaison, si la fermeture de $\gamma(U_0)$ dans la topologie de la convergence uniforme est compacte, alors, par un théorème de Weil [**4**], $\gamma(U_0)$ est (P), (QP) ou bien (PP).

C'est pourquoi l'oscillateur harmonique, dont toutes les orbites ont les plus fortes propriétés de compacité, est celui dont le comportement pour des temps grands est le plus simple. Une *question centrale* des EDP, que nous allons étudier et à laquelle