Séminaires & Congrès

COLLECTION SMF

GEOMETRIC AND DIFFERENTIAL GALOIS THEORIES

Numéro 27

D. Bertrand, Ph. Boalch, J.-M. Couveignes, P. Dèbes, eds.

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Diffusion

Maison de la SMF	Hindustan Book Agency	AMS
Case 916 - Luminy	O-131, The Shopping Mall	P.O. Box 6248
13288 Marseille Cedex 9	Arjun Marg, DLF Phase 1	Providence RI 02940
France	Gurgaon 122002, Haryana	USA
smf@smf.univ-mrs.fr	Inde	www.ams.org

Tarifs

Vente au numéro : 40 € ($ 60)

Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

Secrétariat

Séminaires et Congrès
Société Mathématique de France
Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie
75231 Paris Cedex 05, France
Tél : (33) 01 44 27 67 99 • Fax : (33) 01 40 46 90 96
revues@smf.ens.fr • http://smf.emath.fr/

ISSN 1285-2783

ISBN 978-2-85629-364-5

Directeur de la publication : Aline BONAMI

Séminaires & Congrès

COLLECTION SMF

GEOMETRIC AND DIFFERENTIAL GALOIS THEORIES

Numéro 27

D. Bertrand, Ph. Boalch, J.-M. Couveignes, P. Dèbes, eds.

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

D. Bertrand

Institut de Mathématiques - Université Pierre et Marie Curie, Case 247
4, Place Jussieu
75252 Paris Cedex 05 - France
bertrand@math.jussieu.fr

Ph. Boalch

École normale supérieure et CNRS - Dépt. de mathématiques et applications (DMA)
45 rue d'Ulm
75005 Paris - France
boalch@dma.ens.fr

Jean-Marc Couveignes

Institut de Mathématiques de Bordeaux - Université Bordeaux I
351, cours de la Libération
33405 Talence cedex - France
Jean-Marc.Couveignes@math.u-bordeaux1.fr

Pierre Dèbes

Laboratoire Paul Painlevé - U.F.R. de Mathématiques - Université Lille 1
59655 Villeneuve d'Ascq cedex - France
Pierre.Debes@univ-lille1.fr

***Classification mathématique par sujets* (2000). —** 11F32, 11S20, 12E30, 12F10, 12F12, 12F15, 12H05, 12H10, 12H20, 12H25, 13B05, 14C25, 14D20, 14D22, 14F20, 14F42, 14G20, 14G22, 14H30, 14K15, 16T10, 20D06, 20G40, 32G20, 32G34, 34M15, 34M55.

***Mots-clefs*. —** Catégorie tannakienne semisimple, cohomologies de Weil, conjecture d'Abhyankar, conjecture de la torsion, connexion logarithmique, cycles motiviques, déformations isomonodromiques, différentielles algébriques, droite projective, ensemble de Higgs, équations algébriques en caractéristique finie, équations algébriques en caractéristique nulle, équations de Painlevé, équations différentielles, espace de modules pour les connexions linéaires, extensions inséparables, géométrie anabélienne, géométrie de Berkovich, groupe fondamental, groupes de monodromie, groupes fondamentaux p-adiques, involution de Lefschetz, matrices de Stokes, modules artiniens, modules de Frobenius, Painlevé VI, représentations galoisiennes, revêtements galoisiens, schémas en groupes finis, singularité apparente, singularités irrégulières, théorie de Galois différentielle, théorie de Galois, théorie des corps amples, théorie des motifs, variétés abéliennes, variétés jacobiennes.

GEOMETRIC AND DIFFERENTIAL GALOIS THEORIES

D. Bertrand, Ph. Boalch, J.-M. Couveignes, P. Dèbes, eds.

***Abstract.* —** On March 29-April 2, 2010, a meeting was organized at the Luminy CIRM (France) on geometric and differential Galois theories, witnessing the close ties these theories have woven in recent years. The present volume collects the Proceedings of this meeting. Although it may be viewed as a continuation of the one held 6 years earlier on arithmetic and differential Galois groups (see *Séminaires & Congrès*, vol. 13), several new and promising themes have appeared. The articles gathered here cover the following topics: moduli spaces of connexions, differential equations and coverings in finite characteristic, liftings, monodromy groups in their various guises (tempered fundamental group, motivic groups, generalized difference Galois groups), and arithmetic applications.

***Résumé*. (Théories de Galois géométrique et différentielle). —** Ce volume constitue les actes du colloque sur les théories de Galois géométrique et différentielle qui s'est déroulé au CIRM de Luminy (France) du 29 Mars au 2 Avril 2010. À la suite d'un premier colloque tenu en 2004 sur ces questions (voir *Séminaires & Congrès*, vol. 13), les liens entre les deux théories se sont consolidés, tout en donnant naissance à de nouveaux thèmes de recherche. Les articles rassemblés dans le présent volume abordent les sujets suivants : espaces de modules de connexions, équations différentielles et revêtements en caractéristique finie, relèvements, groupes de monodromie sous des aspects variés (groupe fondamental tempéré, groupes motiviques, groupes de Galois aux différences généralisés), et applications arithmétiques.

TABLE OF CONTENTS

ABSTRACTS

Fifteen years after their discovery, ample fields now stand at the center of research in contemporary Galois theory and attract more and more attention also from other areas of mathematics. This survey gives an introduction to the theory of ample fields and discusses open problems.

In this note we show (by interpreting results both old and new) that various Galois theoretic statements about algebraic equations in characteristic p, that are "non-liftable" to statements about algebraic equations in characteristic zero, can nevertheless be lifted to statements about "arithmetic étale equations" in characteristic zero.

This paper is essentially a survey of André's theory of pure motivated motives with an emphasis on specialization theory in characteristic zero. We review first the classical construction of pure motives and then turn to pure motivated motives whose construction is modeled upon the one of pure homological motives, replacing homological cycles by motivated cycles. Basically, motivated cycles are obtained from homological cycles by adjoining formally the Lefschetz involution so that the so-called standard conjectures become true in the category of pure motivated motives; in particular, this category is a semisimple Tannakian category naturally equipped with fibre functors coming from Weil cohomologies. The last section is devoted to the ℓ-adic version of André's specialization theorem for motivated cycles, which asserts that, given a family of motivated motives M over a scheme S of finite type over a finitely generated field k of characteristic 0, the locus of all $s \in S(k)$ where the motivated motivic Galois group associated with $M_{\bar{s}}$ degenerates is thin in $S(k)$. When S is a curve, we improve André's

statement by resorting to a uniform open image theorem for ℓ-adic cohomology proved by A. Tamagawa and the author. We conclude by some applications of this specialization theorem.

Note on torsion conjecture

In this note, we give an elementary and effective proof of the fact that the torsion conjecture for jacobian varieties implies the torsion conjecture for abelian varieties.

Introduction to the Galois theory of Artinian simple module algebras

We give an introduction to a Galois theory of Artinian simple module algebras. To this end, we first recall the Picard-Vessiot theories of étale and difference equations, Umemura's étale Galois theory and Morikawa-Umemura's difference Galois theory. Then we sketch the main ideas of Amano and Masuoka's unification of the Picard-Vessiot theories of étale and difference extensions. We show how the étale Galois theory of Umemura and the difference Galois theory of Morikawa-Umemura can be unified using Artinian simple module algebras in lieu of étale or difference fields, respectively, and remove the restriction to fields of characteristic 0. Finally, we compare this unified theory to the Picard-Vessiot theory of Amano and Masuoka in the case of Picard-Vessiot extensions of Artinian simple module algebras.

Tempered fundamental group

This paper is a survey of anabelian aspects of the tempered fundamental group of nonarchimedean analytic spaces. This tempered fundamental group classifies analytic Ètale coverings that become topological coverings for Berkovich topology after pullback by some finite étale covering. This article will focus on two aspects: a nonarchimedean analog of Grothendieck-Teichmüller theory and a geometric interpretation of compact subgroups of the tempered fundamental group and of a prime-to-p version of the tempered fundamental group.

We look at natural foliations on the Painlevé VI moduli space of regular connections of rank 2 on $\mathbb{P}^1 - \{t_1, t_2, t_3, t_4\}$. These foliations are fibrations, and are interpreted in terms of the nonabelian Hodge filtration, giving a proof of the nonabelian Hodge foliation conjecture in this case. Two basic kinds of fibrations arise: from apparent singularities, and from quasiparabolic bundles. We show that these are transverse. Okamoto's additional symmetry, which may be seen as Katz's middle convolution, exchanges the quasiparabolic and apparent-singularity foliations.

Monodromy groups of Frobenius modules and étale modules with Frobenius structure over p-adic and t-adic rings of Laurent series are studied. Using Galois representations in many cases, at least the connected inverse problem could be solved affirmatively.

In positive characteristic, nearly all Picard-Vessiot extensions are inseparable over some intermediate iterative étale extensions. In the Galois correspondence, these intermediate fields correspond to nonreduced subgroup schemes of the Galois group scheme. Moreover, the Galois group scheme itself may be nonreduced, or even infinitesimal. In this article, we investigate which finite group schemes occur as iterative étale Galois group schemes over a given ID-field. For a large class of ID-fields, we give a description of all occuring finite group schemes.

For $\ell \neq p$ odd primes, we examine $PSL_2(\ell)$-covers of the projective line branched at one point over an algebraically closed field k of characteristic p, where $PSL_2(\ell)$ has order divisible by p. We show that such covers can be realized with a large variety of inertia groups. Furthermore, for each inertia group realized, we can realize all "sufficiently large" higher ramification filtrations.

After explaining the problem and the results in a short survey of joint work with M-H. Saito and work by K. Okamoto on the geometry of Painlevé equations, two special families of linear étale equations, related to the equations PI, PIII(D_8), are studied in detail. Fine moduli spaces are constructed and identified with Okamoto–Painlevé spaces. The universal property of the moduli spaces implies the Painlevé property for these equations.

The aim of this note is to give a short overview of J. Kovacic's scheme-theoretic approach ([**13**], [**14**]) to the Galois theory of strongly normal étale extensions and to highlight the main difficulties and differences one has to overcome to obtain a similar theory for difference equations.

RÉSUMÉS DES ARTICLES

Quinze ans après leur découverte, les corps amples se situent maintenant au cœur de la recherche contemporaine en théorie de Galois et attirent de plus en plus l'attention de la part d'autres branches des mathématiques. Ce travail présente une introduction à la théorie des corps amples et traite de quelques problèmes ouverts.

Dans cette note, on démontre, en réinterprétant des résultats tant anciens que nouveaux, que divers énoncés de nature galoisienne sur les équations algébriques en caractéristique finie, qui ne peuvent être relevés en des énoncés sur des équations algébriques en caractéristique nulle, peuvent néanmoins l'être en des énoncés portant sur des «équations différentielles algébriques» en caractéristique nulle.

Cet article est une introduction à la théorie des motifs motivés purs développée par André. Nous nous intéressons plus particulièrement au problème de la spécialisation de ces motifs en caractéristique 0. Nous commençons par rappeler la construction classique des motifs purs puis nous présentons la construction des motifs purs motivés comme une variante de la construction des motifs purs homologiques où les cycles homologiques sont remplacés par les cycles motivés. En gros, les cycles motivés sont obtenus en adjoignant formellement l'involution de Lefschetz aux cycles homologiques de sorte que les conjectures dites standard deviennent vraies dans la catégorie des motifs purs motivés ; en particulier, cette catégorie est une catégorie tannakienne semisimple naturellement munie de foncteurs fibres provenant des cohomologies de Weil considérées. La dernière partie de cet article est consacrée à la version ℓ-adique du théorème d'André sur la spécialisation des cyces motivés. Celui-ci peut s'énoncer comme suit. Soit k un