Astérisque

SYLVESTRE GALLOT

Volumes, courbure de Ricci et convergence des variétés

Astérisque, tome 252 (1998), Séminaire Bourbaki, exp. n° 835, p. 7-32

http://www.numdam.org/item?id=SB_1997-1998__40__7_0

© Société mathématique de France, 1998, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (<http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**VOLUMES, COURBURE DE RICCI ET
CONVERGENCE DES VARIÉTÉS**
[d'après T.H. Colding et Cheeger-Colding]

par Sylvestre GALLOT

1. PRÉSENTATION

Un des antécédents des travaux récents de T. Colding et de J. Cheeger et T. Colding est le théorème de finitude de J. Cheeger (1967) :

1.1. THÉORÈME ([Ch]).— *Pour toute donnée de $K, D, \delta > 0$ et d'un entier $n \geq 2$, il n'y a qu'un nombre fini de variétés différentiables M^n qui admettent une métrique riemannienne qui vérifie $-K^2 \leq \sigma_M \leq K^2$, $\text{diam}(M) \leq D$ et $\text{Vol}(M) \geq \delta$.*

Ici, σ_M , $\text{diam}(M)$ et $\text{Vol}(M)$ désignent respectivement la *courbure sectionnelle*, le *diamètre* et le *volume* associés à la métrique riemannienne.

On obtient un énoncé équivalent au théorème 1.1 en substituant l'hypothèse "rayon d'injectivité minoré" à l'hypothèse "volume minoré" (le *rayon d'injectivité* $\text{inj}(M)$ est le plus grand rayon d'une boule dans laquelle tous les points sont joints au centre par une unique géodésique).

K. Grove, P. Petersen et J.Y. Wu ([G-P-W], voir [Ge] pour une démonstration plus simple) ont montré qu'on peut, dans le théorème 1.1, s'affranchir de la borne supérieure de la courbure sectionnelle (en dimension différente de 3 et 4).

M. Gromov (1981) montra que ce résultat de finitude découle d'un théorème de compacité pour une topologie associée à une nouvelle distance qui est une généralisation de la classique distance de Hausdorff d_H^Z entre compacts d'un même espace métrique Z et qu'il définit en considérant l'ensemble des variétés riemanniennes compactes comme un sous-ensemble de l'ensemble des espaces métriques compacts ; la distance de Gromov-Hausdorff $d_{GH}(X, Y)$ est alors l'infimum (en Z , i et j) de $d_H^Z(i(X), j(Y))$ pour tous les plongements isométriques i et j des espaces métriques X et Y dans un troisième espace métrique Z . Une version (partielle) du théorème de compacité de M. Gromov est le :

1.2. THÉORÈME ([G-L-P], chapitre 8).— *Pour toute donnée de D , $\delta > 0$ et d'un entier $n \geq 2$, l'ensemble des variétés riemanniennes M^n vérifiant $|\sigma_M| \leq 1$, $\text{diam}(M) \leq D$ et $\text{inj}(M) > \delta$ est compact pour la topologie associée à la distance de Gromov–Hausdorff (si l'on admet comme espaces–limite les variétés riemanniennes munies de métriques C^0).*

Certains arguments de la preuve de ce théorème furent complétés par A. Katsuda ([Ka]) et S. Peters ([Pet]) ; ce dernier s'attacha en particulier à établir la régularité optimale des métriques–limite, qui est $C^{1,\alpha}$ (pour tout $\alpha < 1$).

J. Cheeger et M. Anderson prouvèrent qu'on peut, dans le théorème 1.2, substituer l'hypothèse “courbure de Ricci minorée” à l'hypothèse de “courbure sectionnelle bornée”, mais que l'ensemble des variétés considérées n'est plus alors que précompact dans la topologie C^α ($\alpha < 1$).

L'idéal serait d'élargir ces résultats à des classes plus vastes de variétés riemanniennes et d'obtenir les résultats de finitude, de rigidité ou d'équivalence (homotopique, homéomorphique ou difféomorphique) comme corollaires de propriétés de continuité, de maximalité ou de stabilité (presque maximalité) de certains invariants géométriques, vus comme des fonctionnelles sur la classe des variétés riemanniennes considérées, les deux défis principaux étant de :

- (i) s'affranchir de toute hypothèse sur le rayon d'injectivité,
- (ii) remplacer la donnée d'une borne *a priori* de la courbure sectionnelle par la donnée d'un minorant *a priori* de la courbure de Ricci.

D'après (i), les propriétés universelles à établir devront rester valables sans modification pour les suites de variétés qui “s'effondrent” (décrites par J. Cheeger et M. Gromov [Ch-Gv] et K. Fukaya [Fu1]), *i. e.* dont la courbure et le diamètre restent bornés pendant que leur rayon d'injectivité (et donc leur volume) tend vers zéro.

À propos de (ii), noter qu'une hypothèse sur la courbure de Ricci est beaucoup plus faible qu'une hypothèse sur la courbure sectionnelle puisque, dans la direction d'un vecteur unitaire tangent donné, la courbure de Ricci est la moyenne des courbures sectionnelles de tous les 2-plans contenant ce vecteur (multipliée par $n - 1$).

Jusqu'aux travaux récents de T. Colding, très peu de résultats obéissaient simultanément aux impératifs (i) et (ii). En effet, en courbure de Ricci de signe quelconque, la plupart des résultats antérieurs prouvaient la finitude d'invariants homologiques ou spectraux contenant des informations topologiques assez faibles. Il en est ainsi de la majoration du premier nombre de Betti (par une fonction d'un minorant de la courbure de Ricci et d'un majorant du diamètre) donnée par M. Gromov (1980, [G-L-P], voir [Ga], 1981, pour une autre preuve). Un résultat qui motive le programme tracé

par (i) et (ii) est le théorème de précompacité de M. Gromov :

1.3. THÉORÈME ([G-L-P], chapitre 5).— *Pour tout entier $n \geq 2$, l'ensemble des variétés riemanniennes M^n , qui vérifient $\text{diam}(M) \leq D$ et $\text{Ric}_M \geq -(n-1)$ est précompact pour la distance de Gromov–Hausdorff.*

Les espaces–limite sont des espaces métriques, éventuellement très singuliers (voir cependant les derniers travaux de J. Cheeger et T. Colding ([Ch-Co2],[Ch-Co3]) qui initient une description de leurs propriétés) et peu d'invariants passent à la limite (par exemple, la dimension n'est pas continue, puisque le tore $\mathbf{T} \times \varepsilon \cdot \mathbf{T}^{n-1}$ tend vers $\mathbf{T}$). On ne croyait donc guère à la possibilité de contrôler des invariants fins comme le type différentiable à l'aide d'un simple minorant de la courbure de Ricci et d'un majorant du diamètre. C'est pourtant un résultat de ce type que donne le

1.4. THÉORÈME (J. Cheeger et T. Colding, 1997, [Ch-Co2], théorème A.1.12).— *Soient M^n une variété compacte et $(M_k)_k$ une suite de variétés de même dimension n qui convergent vers M^n au sens de Gromov–Hausdorff et satisfont $\text{Ric}_{M_k} \geq -(n-1)$. Alors, pour k suffisamment grand, M_k est difféomorphe à M .*

1.5. Contre-exemples.— On trouvera facilement des contre-exemples où la limite est un espace singulier de dimension inférieure. Il est plus difficile de construire, comme le fait M. Anderson ([An1]), une n -variété avec singularités coniques qui est la limite de deux suites de variétés régulières *de même dimension n* (et de courbure de Ricci minorée) qui ne sont pas homotopiquement équivalentes. Ceci souligne le rôle crucial joué, dans la preuve de 1.4, par la régularité de M^n , ou plus précisément par le fait que les petites boules de M^n ont presque le même volume que les boules euclidiennes de même rayon.

Voici un autre contre-exemple (trivial, mais typique de ce qui peut survenir quand la courbure de Ricci n'est pas minorée) : dans une sous-variété M^n d'une variété X^{n+1} , construisons un graphe qui relie les points d'un $\frac{\varepsilon}{2}$ -réseau de M ; considérons une fonction nulle sur le graphe, positive et régulière sur son complémentaire dans X et une de ses lignes de niveau M_ε régulière située à distance inférieure à $\frac{\varepsilon}{2}$ du graphe. On obtient ainsi une ε -approximation de Hausdorff de M par une variété de topologie beaucoup plus compliquée.

a) Résultats de continuité (voir aussi le chapitre 4).

Après avoir résolu le cas où la variété–limite est la sphère ([Co2]), T. Colding donne une réponse complète à cette question, conjecturée par J. Cheeger et M. Anderson :

1.6. THÉORÈME ([Co3], théorème 0.1).— *Pour tout entier $n \geq 2$, la fonction $B \rightarrow \text{Vol}(B)$ est continue en tout point B de l'ensemble des boules géodésiques des variétés riemanniennes complètes de dimension n (vérifiant $\text{Ric} \geq -(n-1)$), muni de la distance de Gromov-Hausdorff.*

Rappelons qu'on ne s'autorise aucune borne sur le rayon d'injectivité ni sur le volume (dans le cas d'une suite convergente – au sens de Gromov-Hausdorff – de variétés compactes, le théorème de continuité fournit “gratuitement” une minoration du volume dès que la limite est régulière et de même dimension).

b) Résultats de stabilité du volume (voir aussi le chapitre 5)

Certaines variétés sont de volume maximal parmi toutes les variétés de courbure de Ricci minorée. C'est le cas de la sphère parmi toutes les variétés de courbure de Ricci supérieure ou égale à $(n-1)$, des boules euclidiennes parmi toutes les boules de variétés de courbure de Ricci positive ou nulle. C'est aussi le cas des variétés de révolution $M_{N,f} = N^{n-1} \times_f [a, b]$ (i.e. munies de la métrique $f(r)^2 \cdot g_N + (dr)^2$) parmi tous les anneaux $A_{a,b} = \{a \leq \rho \leq b\}$ (où ρ désigne la distance dans une variété M à un compact donné) dont la courbure de Ricci (resp. la courbure moyenne du bord $\{\rho = a\}$) est minorée (resp. majorée) par celle de $M_{N,f}$. (Ces résultats sont des corollaires immédiats des propriétés de Bishop-Gromov 2.3 et (2.4).)

Le problème est de savoir si une variété, dont le volume est proche de la valeur maximale, est à distance de Gromov-Hausdorff petite de celle qui réalise le maximum.

*** Le cas de la sphère**

En 1983, K. Shiohama prouvait le :

1.7. THÉORÈME ([Sh]).— *Pour toute donnée de K et d'un entier $n \geq 2$, il existe un $\varepsilon = \varepsilon(n, K) > 0$ tel que toute variété riemannienne M^n vérifiant $\text{Ric}_M \geq \text{Ric}_{S^n}$, $\sigma_M \geq -K^2$ et $\text{Vol}(M) > \text{Vol}(S^n) - \varepsilon$ soit homéomorphe à S^n .*

G. Perelman ([Per1], 1994) prouvait le même résultat *sans* l'hypothèse sur la courbure sectionnelle. L'histoire des théorèmes de pincement de la sphère illustre la difficulté qu'il y a à passer d'un résultat d'homéomorphisme à un résultat de difféomorphisme. Ainsi, Y. Otsu, K. Shiohama et T. Yamaguchi ([O-S-Y], 1989) prouvaient le théorème 1.7 en concluant au difféomorphisme de M avec S^n , mais sous l'hypothèse (beaucoup plus forte, voir ci-dessus) “ $\sigma_M \geq 1$ ”. En 1996, T. Colding prouve le :

1.8. THÉORÈME ([Co1]).— *Pour tout $\varepsilon > 0$ et tout entier $n \geq 2$, il existe un $\delta = \delta(\varepsilon, n) > 0$ tel que toute variété riemannienne M^n vérifiant $\text{Ric}_M \geq \text{Ric}_{S^n}$ et $\text{Vol}(M) \geq (1 - \delta) \text{Vol}(S^n)$ est à distance de Gromov–Hausdorff inférieure à ε de S^n .*

Un corollaire de ce théorème et du théorème 1.4 est le :

1.9. THÉORÈME (J. Cheeger, T. Colding [Ch-Co2], theorem A.1.10).— *Il existe un $\varepsilon(n) > 0$ tel que toute variété riemannienne M^n qui vérifie $\text{Ric}_M \geq \text{Ric}_{S^n}$ et $\text{Vol}(M) \geq (1 - \varepsilon(n)) \text{Vol}(S^n)$ soit difféomorphe à S^n .*

*** Le cas des boules euclidiennes :**

1.10. THÉORÈME (T. Colding, 1997 [Co3]).— *Pour tout $\varepsilon > 0$ et tout entier $n \geq 2$, il existe un $\delta = \delta(\varepsilon, n)$ et un $\rho = \rho(\varepsilon, n)$ positifs (universels) tels que, sur toute variété riemannienne M^n qui vérifie $\text{Ric}_M \geq -(n-1)$, toute boule $B_M(p, r)$ (de rayon $r < \rho$) qui vérifie $\text{Vol}(B_M(p, r)) \geq (1 - \delta) \text{Vol}(B_{\mathbf{R}^n}(0, r))$ est à distance de Gromov–Hausdorff inférieure à $\varepsilon \cdot r$ de la boule euclidienne de même rayon.*

Conséquences.— Une conséquence du théorème 1.6 est que, lorsqu’une suite de variétés M_k (vérifiant $\text{Ric}_{M_k} \geq -(n-1)$) converge au sens de Gromov–Hausdorff vers une variété M (fixée) compacte régulière de même dimension n (en faisant tendre $p_k \in M_k$ vers $p \in M$), il existe un $r_0 > 0$ (dépendant de M) tel que, pour k assez grand, $\text{Vol} B_{M_k}(p_k, r_0) \simeq \text{Vol} B_M(p, r_0) \geq \text{Vol} B_{\mathbf{R}^n}(0, r_0)(1 - C r_0^2)$ (la dernière inégalité dérivant du développement de Taylor du volume en coordonnées exponentielles). Par l’inégalité de Bishop–Gromov (2.4), on en déduit que $\text{Vol} B_{M_k}(p_k, r) \geq \text{Vol} B_{\mathbf{R}^n}(0, r)(1 - \delta)$ pour tout $r \leq r_0$. Le théorème 1.10 implique alors que les variétés M_k vérifient toutes (pour une même valeur de $\varepsilon, r_0 > 0$) la propriété $\mathcal{A}(\varepsilon, r_0)$, *i. e.* que toute boule $B_{M_k}(p_k, r)$ de M_k (de rayon inférieur à r_0) est à distance de Gromov–Hausdorff plus petite que εr de $B_{\mathbf{R}^n}(0, r)$; cette distance *reste donc petite par rapport au rayon de la boule*, même lorsque celui-ci tend vers zéro. Si cette εr -approximation de Hausdorff était la restriction de l’approximation de Hausdorff F_k de M_k sur M , cela conclurait immédiatement à l’homéomorphisme dans le théorème 1.4 (on appelle ε_k -approximation de Hausdorff une application $F_k : M_k \rightarrow M$ vérifiant $|d_M(F_k(x), F_k(y)) - d_{M_k}(x, y)| \leq \varepsilon_k$ et telle que la distance de Hausdorff dans M entre M et $F_k(M_k)$ soit inférieure à ε_k). Malheureusement, nous n’avons ici que des approximations de Hausdorff locales. C’est pourquoi T. Colding et J. Cheeger ([Ch-Co2], pp. 462-468) prouvent le théorème 1.4 en construisant *ex abstracto* des recollements entre ces approximations de Hausdorff locales qui leur permettent de définir une famille de variétés $W_i(X)$,

à partir d'une variété X ayant la propriété $\mathcal{A}(\varepsilon, r_0)$, de la manière suivante : considérons une famille de boules euclidiennes $\bar{B}_j^i$ qui sont des $\varepsilon 2^{-i}$ -approximations de Hausdorff de boules B_j^i de X , de rayon $16 \cdot 2^{-i}$, centrées sur un 2^{-i} -réseau. En éliminant les intersections trop petites, les changements de cartes sur les $B_j^i \cap B_l^i$ se transcrivent en des pseudo-changements de cartes qui sont des $\varepsilon 2^{-i}$ -approximations de Hausdorff entre (gros) domaines de $\bar{B}_j^i$ et de $\bar{B}_l^i$, donc voisins d'isométries qui vérifient presque la condition de cocycle. Un argument d'isotopie (déjà présent dans [Ch] et [Ch-Gv]) permet de les déformer et de les restreindre en de vrais changements de cartes difféomorphes dont la liste définit la structure de variété $W_i(X)$. Ce procédé aboutit à la même structure de variété si on remplace les pseudo-cartes initiales par d'autres $\varepsilon 2^{-i}$ -approximations de Hausdorff euclidiennes entre les $\bar{B}_j^i$ et les $\bar{B}_l^i$. En particulier, nous pouvons prendre à l'étape (i+1) les restrictions des $\varepsilon 2^{-i}$ -approximations de l'étape précédente, donc $W_{i+1}(X)$ et $W_i(X)$ ont la même structure de variété. De même, tant que $r_0 \gg \varepsilon 2^{-i_0} \gg \varepsilon_k$, nous pouvons prendre les restrictions des $F_k : M_k \rightarrow M$ (composées avec des cartes de M), ce qui implique que $W_{i_0}(M_k) = W_{i_0}(M)$. Enfin, pour i suffisamment grand ($i \geq i(X)$ dépendant de X), nous pouvons prendre les restrictions des changements de cartes exponentiels de la variété X elle-même, $W_i(X)$ a alors la même structure de variété que X . Nous obtenons $M_k \simeq W_{i(M_k)}(M_k) \simeq W_{i_0}(M_k) \simeq W_{i_0}(M) \simeq W_{i(M)}(M) \simeq M$. Ceci ne donne que les principales étapes de la preuve du théorème 1.4. (voir l'appendice A de [Ch-Co2] pour une preuve complète).

Remarque.— Dans le dernier contre-exemple de 1.5, quand r est du même ordre que le rayon d'injectivité de M_ε les boules de rayon r de M_ε ne sont pas situées à distance de Gromov-Hausdorff petite, relativement à r , de la boule euclidienne correspondante.

* Le cas des variétés de révolution

Sur l'ensemble des anneaux $A_{a,b} = \{a \leq \rho \leq b\}$ dont la courbure de Ricci est minorée par son analogue dans la variété de révolution $M_{N,f}$ (i.e. $\text{Ric}_M \geq -(n-1) \frac{f''}{f} \circ \rho$) et dont la courbure moyenne du bord $\{\rho = a\}$ est majorée par son analogue, la fonctionnelle (dont les variétés de révolution $M_{N,f}$ réalisent toutes le maximum, noté $\text{Max } \widetilde{\text{Vol}}_f$) est le "volume relatif au bord" : $\widetilde{\text{Vol}}(A_{a,b}) = \frac{\text{Vol}(A_{a,b})}{\text{Vol}_{\{\rho=a\}}}$. Quand ce volume est presque maximal, J. Cheeger et T. Colding montrent que

Pour toute donnée de $n \geq 2$, $\eta > 0$ et $f > 0$ régulière, il existe un $\varepsilon > 0$ tel que, à tout anneau de l'ensemble ci-dessus qui vérifie $\widetilde{\text{Vol}}(A_{a,b}) \geq (1 - \varepsilon) \text{Max } \widetilde{\text{Vol}}_f$, on puisse associer un espace de longueurs N tel que $A_{a,b}$ soit situé à distance de Gromov-

Hausdorff inférieure à η de la variété de révolution $M_{N,f}$ ([Ch-Co1], théorème 4.85).

Ce résultat admet de nombreuses applications et contient potentiellement les théorèmes 1.7 et 1.8 (voir ([Ch-Co1], théorème 6.68). Cependant, puisqu'il n'y a pas unicité de la variété de révolution qui réalise le maximum, la propriété de volume relatif presque maximal ne peut *a fortiori* donner aucune information sur la partie transversale N , sinon qu'il s'agit d'un espace métrique qui représente une ligne de niveau "générique" de la fonction-distance ρ ; de plus, aussi petit que soit ε , l'anneau A_{ab} n'est généralement pas homéomorphe à un produit ; des contre-exemples sont donnés par G. Perelman ([Per3]).

Le résultat antérieur le plus voisin de l'esprit de ce théorème est le célèbre "splitting theorem" de J. Cheeger et D. Gromoll ([Ch-Gl], 1971). Un corollaire du résultat ci-dessus est justement une version "à courbure de Ricci presque positive" du "splitting theorem", conjecturée par K. Fukaya et T. Yamaguchi ([F-Y]) :

1.11. THÉORÈME (J. Cheeger et T. Colding 1996, [Ch-Co1] theorem 6.64).— *Soit M^n une variété riemannienne complète qui est limite d'une suite de variétés riemanniennes M_i (de même dimension et vérifiant $\text{Ric}_{M_i} \geq -(n-1)\varepsilon_i$, où $\varepsilon_i \rightarrow 0_+$) au sens suivant : il existe un point $p \in M$ et une boule de rayon R_i ($R_i \rightarrow +\infty$) dans chaque M_i dont la distance de Gromov-Hausdorff à $B_M(p, R_i)$ tend vers zéro. Si M contient une géodésique, définie sur $] -\infty, +\infty[$, qui est le plus court chemin entre chaque paire de ses points, alors M est isométrique à un produit $N \times \mathbf{R}$.*

c) Variétés de courbure de Ricci presque positive

Une première question consiste à se demander s'il existe un $\varepsilon(n) > 0$ universel tel que toute variété riemannienne compacte $\varepsilon(n)$ -presque plate M^n (i.e. vérifiant $|\sigma_M| \leq \varepsilon(n)$ et $\text{diam}(M) \leq 1$ ou, de manière équivalente *via* renormalisation, $|\sigma_M| \cdot \text{diam}(M)^2 \leq \varepsilon(n)$) admette une métrique plate. La réponse est évidemment négative, des contre-exemples étant fournis par les nilvariétés (quotients compacts de groupes nilpotents, voir par exemple [B-K]). La question devenait donc de savoir si les nilvariétés sont les seules variétés à admettre une métrique $\varepsilon(n)$ -presque plate. La démonstration de cette conjecture par M. Gromov (cf. [B-K]) a beaucoup influencé la manière dont fut vécue par la suite l'interaction entre Algèbre et Géométrie.

Parmi les travaux dans cet esprit, un théorème de K. Fukaya et T. Yamaguchi ([F-Y]) prouve que toute variété riemannienne compacte M^n vérifiant $\sigma_M \cdot \text{diam}(M)^2 \geq -\varepsilon(n)$ est de groupe fondamental presque nilpotent. Une conséquence du "splitting theorem" 1.11, répondant à une conjecture de M. Gromov, est le :

1.12. THÉORÈME (J. Cheeger et T. Colding, 1996, [Ch-Co1] theorem 8.6).— *Il existe un $\varepsilon(n) > 0$ tel que toute variété vérifiant $\text{diam}(M)^2 \cdot \text{Ric}_M \geq -\varepsilon(n)$ soit de groupe fondamental presque nilpotent.*

La seconde question remonte à S. Bochner qui se servait de la formule qui porte son nom (voir la section 2.a) pour démontrer (entre autres résultats) que toute variété riemannienne compacte de courbure de Ricci positive ou nulle a un premier nombre de Betti inférieur ou égal à $b_1(\mathbf{T}^n) = n$ et que l'application d'Albanese (cf. le chapitre 3) est alors une submersion riemannienne sur un tore plat de dimension $b_1(M)$ (donc une isométrie lorsque $b_1(M) = n$). En 1981, M. Gromov ([G-L-P], théorème 5.21) et S. Gallot ([Ga]) donnèrent deux preuves du fait que cette majoration du premier nombre de Betti reste valable pour des variétés qui vérifient $\text{diam}(M)^2 \cdot \text{Ric}_M \geq -\varepsilon(n)$. Ceci avait amené M. Gromov ([G-L-P], p. 75) à conjecturer que, sous la même hypothèse et si $b_1(M) = n$, la variété est difféomorphe au tore $\mathbf{T}^n$.

Comme une étape vers ce but, T. Yamaguchi ([Ya], 1988) a ensuite prouvé que, pour toute donnée de $n \geq 2$ et de $K > 0$, il existe un $\varepsilon = \varepsilon(n, K) > 0$ tel que, pour toute variété riemannienne M^n vérifiant $\sigma_M \geq -K$, $\text{diam}(M) \leq 1$ et $\text{Ric}_M \geq -\varepsilon$, l'application d'Albanese soit une submersion différentiable sur le tore $\mathbf{T}^{b_1(M)}$.

Lorsque $b_1(M) \leq n-1$, M. Anderson ([An2]) donne des contre-exemples qui prouvent qu'on ne peut s'affranchir de l'hypothèse sur la courbure sectionnelle. Lorsque $b_1(M) = n$, la conjecture de M. Gromov fut démontrée en deux temps, soulignés par les deux théorèmes suivants (le premier impliquant le second grâce au théorème 1.4).

1.13. THÉORÈME (T. Colding, 1997, [Co3], theorem 0.2).— *De toute suite de variétés riemanniennes compactes n -dimensionnelles M_i , de diamètres bornés, vérifiant $\text{Ric}_{M_i} \geq -(n-1)\varepsilon_i$ (où $\varepsilon_i \rightarrow 0_+$) et $b_1(M_i) = n$, on peut extraire une sous-suite dont des revêtements riemanniens finis M'_i convergent, au sens de Gromov–Hausdorff, vers un tore plat n -dimensionnel.*

1.14. THÉORÈME (J. Cheeger, T. Colding, 1997, [Ch-Co2]).— *Il existe un $\varepsilon(n) > 0$ tel que toute variété riemannienne compacte M^n vérifiant $\text{diam}(M)^2 \cdot \text{Ric}_M \geq -\varepsilon(n)$ et $b_1(M) = n$ soit difféomorphe à $\mathbf{T}^n$.*

Nous avons choisi de développer, dans les sections 3 et 4, deux démonstrations archétypiques des méthodes de T. Colding. Le chapitre 3 donne une version simplifiée de la preuve du théorème 1.13 (M^n proche de $\mathbf{T}^n$). Le chapitre 4 donne la preuve du théorème de continuité 1.6. Le chapitre 5 explique comment se démontrent les résultats de stabilité, le cas de la sphère étant traité de manière plus complète. Les méthodes générales utilisées par T. Colding sont décrites dans le chapitre 2. Certaines sont

classiques : formule de S. Bochner (section 2.a), inégalités de Bishop-Gromov (section 2.b) ; on souligne alors la manière particulière dont T. Colding les utilise. Réaliser des fonctions harmoniques ayant une valeur donnée sur le bord d'une boule est un classique de l'analyse ; mais l'utilisation qui en est faite par T. Colding est originale. La version qui en est présentée ici (section 2.e) est due à J. Cheeger et T. Colding ; elle s'appuie sur deux idées : la presque-sous-harmonicité L^∞ et la presque-super-harmonicité L^1 de la fonction "distance à un point tendant vers l'infini" (déjà présente dans la preuve du "splitting theorem" ([Ch-G1]) et dont une version locale était déjà utilisée dans [A-C]) et une relecture d'un résultat de U. Abresch et D. Gromoll ([A-G]) qui montre que la différence entre les deux membres de l'inégalité triangulaire est petite relativement à la hauteur du triangle. Le lemme de Toponogov L^2 , apport original fondamental, est présenté (sous différentes versions) dans la section 2.d.

L'auteur remercie G. Besson et G. Courtois pour leur aide scientifique et leur soutien amical et M. Berger dont les textes l'ont inspiré (voir par exemple [Be]).

2. LES OUTILS ET LEUR MODE D'EMPLOI

a) La formule de Bochner

Une des définitions possibles du tenseur de courbure est qu'il réalise le défaut de commutation des dérivées (covariantes) troisièmes d'une fonction, i.e. $R(X, Y, Z, \nabla f) = DDdf(X, Y, Z) - DDdf(Y, X, Z)$. Un corollaire (prendre la trace de l'égalité ci-dessus) est la formule de Bochner :

$$(2.1) \quad \langle d(\Delta f), df \rangle = -|Ddf|^2 + \frac{1}{2} \Delta (|df|^2) - \text{Ric}_M(\nabla f, \nabla f),$$

où $|\cdot|$ et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désignent les extensions canoniques de la norme et du produit scalaire riemanniens aux produits tensoriels. Sur une variété *sans bord* M de courbure de Ricci presque positive on obtient (en intégrant (2.1)) que toute fonction harmonique a un Hessien petit en norme L^2 . Le cas à bord (ici celui des boules géodésiques) est plus délicat. Il en existe de nombreuses versions ; nous suivrons ici celle présentée par J. Cheeger et T. Colding ([Ch-Co1], proposition 6.60).

2.2 Lemme.— *Soit (M, g) une variété riemannienne vérifiant $\text{Ric}_M \geq -(n-1)\delta$. Si f est une fonction harmonique sur la boule $B(p, 2R)$ (où $R \leq \frac{1}{\sqrt{\delta}}$) telle que $\frac{1}{\text{Vol } B(p, 2R)} \int_{B(p, 2R)} |df|^2 - 1 \leq \eta$, alors on a $\frac{1}{\text{Vol } B(p, R)} \int_{B(p, R)} |\text{Hess } f|^2 \leq C(n) \left(\frac{\eta}{R^2} + \delta \right)$ où $C(n)$ est une constante universelle.*