Astérisque

FABRIZIO ANDREATTA
OLIVIER BRINON

Surconvergence des représentations p-adiques : le cas relatif

Astérisque, tome 319 (2008), p. 39-116
<http://www.numdam.org/item?id=AST_2008__319__39_0>

Astérisque
319, 2008, p. 39–116

SURCONVERGENCE DES REPRÉSENTATIONS p-ADIQUES : LE CAS RELATIF

par

Fabrizio Andreatta & Olivier Brinon

Résumé. — On généralise le formalisme de Tate-Sen, ce qui permet d'étendre la théorie de Sen et de prouver la surconvergence des représentations p-adiques dans le cas relatif.

Abstract. — We generalize Tate-Sen's formalism; this allows to extend Sen's theory and to prove the overconvergence of p-adic representations in the relative case.

1. Introduction

Soit V un anneau de valuation discrète complet, de caractéristique 0, de corps résiduel k parfait de caractéristique $p > 0$. On note K son corps des fractions et v la valuation normalisée par $v(p) = 1$. On fixe une clôture algébrique $\overline{K}$ de K et on note $\overline{V}$ l'anneau des entiers de $\overline{K}$. La valuation v s'étend de façon unique en une valuation de $\overline{K}$, qu'on note encore v. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on choisit $\varepsilon^{(n)} \in \overline{K}$ une racine p^n-ième de l'unité, de sorte que $\left(\varepsilon^{(n+1)}\right)^p = \varepsilon^{(n)}$. Soit $K_\infty = \bigcup\limits_{n\in\mathbf{N}} K\left[\varepsilon^{(n)}\right]$ l'extension cyclotomique de K. C'est une extension galoisienne de K, dont le groupe de Galois s'identifie, via le caractère cyclotomique χ, à un sous-groupe ouvert de $\mathbf{Z}_p^\times$. Écrivons $\mathsf{Im}(\chi) \simeq \mathbf{Z}_p \times F$ où F est fini. Pour $n \in \mathbf{N}_{>0}$, on pose $K_n = K_\infty^{p^{n+1}\mathbf{Z}_p}$, et $K_0 = K$. On note V_n le normalisé de V dans K_n (c'est l'anneau des entiers de K_n) et on pose $V_\infty = \bigcup\limits_{n\in\mathbf{N}} V_n$. Enfin, pour $\delta \in v\big(\overline{K}^\times\big)$, on note p^δ un élément de valuation δ dans V_∞.

Posons $G_K = \mathsf{Gal}\left(\overline{K}/K\right)$ et notons $\mathbf{Rep}_{\mathbf{Q}_p}(G_K)$ la catégorie des représentations p-adiques de G_K, dont les objets sont les $\mathbf{Q}_p$-espaces vectoriels de dimension finie, munis d'une action linéaire et continue de G_K et les morphismes les applications

***Classification mathématique par sujets* (2000).** — 11F80, 11S15, 11S20, 13K05, 14E22.
Mots clefs. — représentations p-adiques, théorie de Sen, (φ, Γ)-modules.

$\mathbf{Q}_p$-linéaires équivariantes. Dans [**17**], Fontaine a construit un corps $\mathcal{E}$ de valuation discrète de caractéristique 0, absolument non ramifié, de corps résiduel imparfait, muni d'un opérateur de Frobenius φ et d'une action de $\mathsf{Gal}\,(K_\infty/K)$ qui commutent. En utilisant la théorie du corps des normes (*cf.* [**21**]), il construit un isomorphisme $\mathsf{Gal}\left(\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{nr}}}/\mathcal{E}\right) \simeq \mathsf{Gal}\left(\overline{K}/K_\infty\right)$ et en déduit une équivalence de catégories ([**17**, Théorème 3.4.3]) entre $\mathbf{Rep}_{\mathbf{Q}_p}(G_K)$ et la catégorie des (φ,Γ)-modules étales sur $\mathcal{E}$, donnée par le foncteur $V \mapsto \mathrm{D}(V) = \left(\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{nr}}} \otimes_{\mathbf{Q}_p} V\right)^{\mathsf{Gal}(\overline{K}/K_\infty)}$. Un (φ,Γ)-module étale sur $\mathcal{E}$ est un $\mathcal{E}$-espace vectoriel D de dimension finie muni d'un opérateur de Frobenius φ et d'une action de $\mathsf{Gal}\,(K_\infty/K)$ semi-linéaires et qui commutent, et qui contient un $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$-réseau $\mathcal{D}$ (où $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}$ désigne l'anneau des entiers de $\mathcal{E}$) tel que le linéarisé de Frobenius $\varphi\otimes 1\colon \mathcal{D}\otimes^{\varphi}_{\mathcal{O}_{\mathcal{E}}}\mathcal{O}_{\mathcal{E}} \to \mathcal{D}$ est un isomorphisme. Notons qu'il existe une version « entière » de ce qui précède, s'appliquant aux $\mathbf{Z}_p$-représentations de G_K, *i.e.* aux $\mathbf{Z}_p$-modules de type fini munis d'une action linéaire et continue de G_K.

Dans [**8**], le résultat de Fontaine est raffiné de la façon suivante. Les corps $\mathcal{E}$ et $\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{nr}}}$ (notés $\mathbf{B}_K$ et $\mathbf{B}$ respectivement par Colmez, et c'est ce système de notation qui est adopté dans ce travail) admettent les sous-corps $\mathbf{B}_K^\dagger$ et $\mathbf{B}^\dagger$ respectivement, constitués des éléments dits surconvergents (car ils admettent une description en termes de fonctions analytiques sur des couronnes). Comme précédemment, ces corps permettent de construire un foncteur $V \mapsto \mathrm{D}^\dagger(V) = \left(\mathbf{B}^\dagger \otimes_{\mathbf{Q}_p} V\right)^{\mathsf{Gal}(\overline{K}/K_\infty)}$ de la catégorie $\mathbf{Rep}_{\mathbf{Q}_p}(G_K)$ dans la catégorie des (φ,Γ)-modules étales sur $\mathbf{B}_K^\dagger$. Le résultat principal de [**8**] est que ce foncteur est une équivalence de catégories, *i.e.* que le foncteur D se factorise par $\mathrm{D}^\dagger$ (*loc. cit.* Proposition III.5.1 et Corollaire III.5.2).

Parmi les applications principales de ce résultat, il y a les formules de réciprocité explicites, qui permettent de reconstruire les invariants $\mathrm{D}_{\mathrm{cris}}(V)$, $\mathrm{D}_{\mathrm{dR}}(V)$ à partir de $\mathrm{D}^\dagger(V)$ (ce qui n'est pas possible à partir de $\mathrm{D}(V)$, parce qu'il n'y a pas de morphisme naturel de $\mathbf{B}$ dans $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+$ ou de $\mathrm{B}_{\mathrm{dR}}^+$ dans $\mathbf{B}$, *cf.* [**8**, II]). C'est l'un des points de départ des travaux de Berger, Colmez, Fontaine et al. qui ont permis la preuve de la conjecture de monodromie p-adique (*cf.* [**10**]).

Décrivons maintenant le cadre dans lequel on va travailler. Soit d un entier, $T_1,\ldots,T_d$ des indéterminées et $R^0 = V\{T_1^{\pm 1},\ldots,T_d^{\pm 1}\}$ le séparé complété de $V[T_1^{\pm 1},\ldots,T_d^{\pm 1}]$ pour la topologie p-adique. On se donne un anneau $\widetilde{R}$ obtenu à partir de R^0 en itérant un nombre fini de fois les opérations suivantes :

(ét) complétion p-adique d'une extension étale ;

(loc) complétion p-adique d'une localisation ;

(comp) complétion par rapport à un idéal contenant p.

On suppose en outre que $V\left[T_1^{\pm 1},\ldots,T_d^{\pm 1}\right] \to \widetilde{R}$ est à fibres géométriquement régulières ou que $\widetilde{R}$ est de dimension de Krull inférieure à 2, et que $k \to \widetilde{R}\otimes_V k$ est géométriquement intègre. Il en résulte que $T_1,\dots,T_d$ est une p-base de $\widetilde{R}\otimes_V k$. Dans ces conditions, le théorème de pureté de Faltings s'applique, cf. 3.2.

Soit E une clôture algébrique de $\mathsf{Frac}\,(\widetilde{R})$. On note $\overline{R}$ la réunion des sous-$\widetilde{R}$-algèbres finies S de E telles que $S[p^{-1}]$ est une extension étale de $\widetilde{R}[p^{-1}]$. On se donne une sous-$\widetilde{R}$-algèbre finie normale R de E telle que $R[p^{-1}]$ est étale sur $\widetilde{R}[p^{-1}]$.

En particulier, R est séparée et complète pour la topologie p-adique, et $R\subset\overline{R}$. On suppose en outre que K est algébriquement clos dans $R[p^{-1}]$.

Pour $n\in\mathbf{N}$, on choisit $T_i^{(n)}\in\overline{R}$ une racine p^n-ième de T_i, de sorte que $\left(T_i^{(n+1)}\right)^p = T_i^{(n)}$. On pose $R'_n = R\left[T_1^{(n)},\dots,T_d^{(n)}\right]$ et on note R_n le normalisé de $R'_n.V_n$ dans $\overline{R}$ (on a $R_n[p^{-1}] = (R'_n.V_n)\,[p^{-1}]$) et $R_\infty = \bigcup\limits_{n\in\mathbf{N}} R_n$. En particulier, on a $R_\infty\subset\overline{R}$.

On pose $\mathcal{G}_R = \mathsf{Gal}\left(\overline{R}[p^{-1}]/R[p^{-1}]\right)$, $\Gamma_R = \mathsf{Gal}\left(R_\infty[p^{-1}]/R[p^{-1}]\right)$ et $\mathcal{H}_R = \mathsf{Ker}\,(\mathcal{G}_R\to\Gamma_R)$. L'anneau $\overline{R}$ est stable par $\mathcal{G}_R$. Le groupe Γ_R s'insert dans la suite exacte

$$1\to\widetilde{\Gamma}_R\to\Gamma_R\to\Gamma_V\to 1$$

où $\widetilde{\Gamma}_R = \mathsf{Gal}\left(R_\infty[p^{-1}]/R.V_\infty[p^{-1}]\right)$ s'identifie à un sous-groupe d'indice fini de $\widetilde{\Gamma}_{\widetilde{R}} = \bigoplus\limits_{i=1}^{d}\mathbf{Z}_p\,\gamma_i$ où γ_i est défini par :

$$\gamma_i\left(T_j^{(n)}\right) = \begin{cases}\varepsilon^{(n)}T_i^{(n)} & \text{si } j=i\\ T_j^{(n)} & \text{si } j\neq i\end{cases}$$

Si $g\in\Gamma_R$, on a les relations $g\gamma_i g^{-1} = \gamma_i^{\chi(g)}$ pour tout $i\in\{1,\dots,d\}$. On choisit γ_0 un générateur topologique de la partie libre de $\mathsf{Gal}\left(R_\infty[p^{-1}]/R'_\infty[p^{-1}]\right)$.

Si B est une sous-$\widetilde{R}$-algèbre de $\overline{R}$, on note $\widehat{B} = \varprojlim\limits_n B/p^nB$ son séparé complété pour la topologie p-adique. Par continuité, $\mathcal{G}_R$ agit sur $\widehat{\overline{R}}$. On prolonge la valuation p-adique sur $\overline{K}$ en une application $v\colon \overline{R}[p^{-1}]\to\mathbf{R}\cup\{+\infty\}$ en posant

$$v(x) = \max\left\{n\in\mathbf{Q}, x\in p^n\overline{R}\right\}.$$

Ce n'est pas une valuation en général (à moins que R soit local), mais vérifie les propriétés (i)-(iv) de la section suivante.

Dans [**3**], la théorie des (φ,Γ)-modules et l'équivalence de catégories de [**17**] ont été généralisées aux $\mathbf{Z}_p$-représentations de $\mathcal{G}_R$: on a des anneaux $\mathbf{A}_R\subset\mathbf{A}$ (généralisant $\mathcal{O}_{\mathcal{E}}\subseteq\mathcal{O}_{\widehat{\mathcal{E}^{\mathrm{nr}}}}$) et une équivalence de catégories

$$\mathbf{Rep}_{\mathbf{Z}_p}(\mathcal{G}_R)\longrightarrow\mathbf{Mod}^{\text{ét}}_{\mathbf{A}_R}(\varphi,\Gamma_R),\quad V\longmapsto(\mathbf{A}\otimes_{\mathbf{Z}_p}V)^{\mathcal{H}_R}$$

(*cf.* théorème 4.34). L'objectif principal de ce travail est de prouver l'analogue de [**8**, Proposition III.5.1] à ce cadre (théorème 4.35).

Le plan de l'article est le suivant.

La preuve de la surconvergence des représentations p-adiques repose sur des techniques dues à Sen, qui ont été axiomatisées dans le cas « classique » par Colmez (formalisme de Tate-Sen [**10**]). L'objet de la première partie de ce travail est de généraliser ces axiomes au cas « relatif ». Rappelons que la méthode de Sen comporte deux étapes, une descente de $\mathcal{G}_R$ à Γ_R, et une « décomplétion », qui fait intervenir des « traces normalisées de Tate généralisées » (*cf.* section 2). On pocède par décomplétions partielles (variable par variable). Une difficulté réside dans le fait que lorsque $d > 0$, le groupe Γ_R n'est pas commutatif. Elle est à l'origine de l'axiome (TS3) (b) (qui est une nouveauté par rapport à [**10**]).

Cela permet d'étendre (théorème 3.1) un résultat classique de Sen (c'était l'objet de [**6**] dans le cas où $R[p^{-1}]$ est un corps, à corps résiduel non nécessairement parfait) : l'application naturelle

$$\varinjlim_{S} \mathrm{H}^1\left(\mathsf{Gal}\left(S_\infty[p^{-1}]/R[p^{-1}]\right), \mathsf{GL}_n\left(S_\infty[p^{-1}]\right)\right) \to \mathrm{H}^1\left(\mathcal{G}_R, \mathsf{GL}_n\left(\widehat{\overline{R}}[p^{-1}]\right)\right)$$

déduite des l'inclusions $S_\infty \subset \widehat{\overline{R}}$, est bijective (la limite inductive étant prise sur les sous-R-algèbres S de $\overline{R}$ telles que $S[p^{-1}]/R[p^{-1}]$ est finie étale galoisienne). Cet énoncé se reformule en termes de $\widehat{\overline{R}}[p^{-1}]$-représentations (corollaire 3.14). Remarquons qu'en utilisant l'action infinitésimale de $\widetilde{\Gamma}_R$, il implique le résultat local de Faltings sur la théorie des fibrés de Higgs (*cf.* remarque 3.15).

Dans la dernière partie, on rappelle les constructions et résultats de [**3**] qui nous sont utiles, on définit les éléments surconvergents et on applique le formalisme de Tate-Sen pour prouver le théorème 4.35, qui affirme qu'on a une équivalence de catégories

$$\mathbf{Rep}_{\mathbf{Z}_p}(\mathcal{G}_R) \longrightarrow \mathbf{Mod}^{\text{ét}}_{\mathbf{A}_R^\dagger}(\varphi, \Gamma_R), \quad V \longmapsto (\mathbf{A}^\dagger \otimes_{\mathbf{Z}_p} V)^{\mathcal{H}_R}$$

où $\mathbf{A}^\dagger$ (resp. $\mathbf{A}_R^\dagger$) désigne le sous-anneau des éléments surconvergents de $\mathbf{A}$ (resp. $\mathbf{A}_R$). Un point technique important (et nouveau) est la construction d'un anneau $\mathbf{A}_R^+$ (*cf.* proposition 4.42). Sa construction, assez délicate, est requise par le besoin d'une structure « entière » de $\mathbf{A}_R$ ayant de bonnes propriétes topologiques.

La motivation principale de ce travail est d'étendre les formules de réciprocité au cas relatif, c'est-à-dire de relier [**3**] et [**7**] (où les anneaux $\mathrm{B}_{\mathrm{cris}}$, B_{dR} sont construits et les notions de représentation p-adique cristalline, de de Rham sont étudiées dans la situation considérée dans cette article).

Cet article doit beaucoup à P. Colmez : sans [**10**] et [**11**], il n'aurait d'ailleurs certainement pas vu le jour. Les auteurs lui sont reconnaissants pour ses commentaires qui ont permis de le clarifier, et de leur avoir en outre communiqué des travaux non publiés.

Pendant l'élaboration de ce travail, le second auteur a bénéficié du soutien du Marie Curie Research Training Network dans le cadre du Réseau de Géométrie Algébrique