

BULLETIN DE LA S. M. F.

ALBERT FATHI

Démonstration d'un théorème de Penner sur la composition des twists de Dehn

Bulletin de la S. M. F., tome 120, n° 4 (1992), p. 467-484

<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1992__120_4_467_0>

© Bulletin de la S. M. F., 1992, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

DÉMONSTRATION D'UN THÉORÈME DE PENNER SUR LA COMPOSITION DES TWISTS DE DEHN

PAR

ALBERT FATHI (*)

RÉSUMÉ. — Nous démontrons le théorème suivant de Penner : si $(\gamma_1, \dots, \gamma_k)$ et $(\delta_1, \dots, \delta_\ell)$ sont deux multicourbes qui remplissent une surface orientée, tout composé en les twists de Dehn positifs $D_{\gamma_1}, \dots, D_{\gamma_k}$ et négatifs $D_{\delta_1}^{-1}, \dots, D_{\delta_\ell}^{-1}$ autour des courbes $\gamma_1, \dots, \gamma_k, \delta_1, \dots, \delta_\ell$, qui contient au moins une occurrence de chacun d'entre eux, est pseudo-Anosov. La démonstration que nous en donnons ne repose pas sur une théorie du réseau ferroviaire dual. De plus le représentant, dans la classe d'isotopie, que nous construisons est conjugué au pseudo-Anosov par une semi-conjugaison qui n'a qu'un nombre fini de préimages non-réduites à un point.

ABSTRACT. — We prove the following theorem due to Penner : if $(\gamma_1, \dots, \gamma_k)$ and $(\delta_1, \dots, \delta_\ell)$ are two multicurves filling an oriented surface, every composition of positive Dehn twists $D_{\gamma_1}, \dots, D_{\gamma_k}$ and of negative Dehn twists $D_{\delta_1}^{-1}, \dots, D_{\delta_\ell}^{-1}$ around the curves $\gamma_1, \dots, \gamma_k, \delta_1, \dots, \delta_\ell$, which contains at least one occurrence of each of them, is pseudo-Anosov. Our proof does not rely on any theory for the dual train-track. Moreover, we construct a representative in the isotopy class that is semi-conjugate to the pseudo-Anosov representative by a semi-conjugacy with only a finite number of preimages which are not points.

0. Introduction et rappels

Pour la suite, nous considérons une surface M compacte, connexe, de genre ≥ 2 et *orientée*. Nous renvoyons à [FLP] pour la plupart des définitions. Nous faisons les rappels suivants essentiellement pour fixer les notations.

(*) Texte reçu le 10 janvier 1991, révisé le 6 janvier 1992.

A. FATHI, University of Florida, Dept. of Mathematics, 201 Walker Hall, Gainesville, Florida 32 611 USA et Laboratoire de Mathématique, ENS Lyon, 46 , Allée d'Italie, 69364 Lyon Cedex 07 France.

Recherche partiellement financée par les bourses # DMS-8801749 et # DMS-9101911 de la NSF.

Classification AMS : 57M99, 57N05, 57R50.

Keywords : pseudo-Anosov, twist of Dehn, surface.

On note par $\mathcal{S}(M)$ l'ensemble des classes d'isotopie de courbes simples de M non homotopes à 0 ou à une composante du bord. Puisque M est orientée, pour γ dans $\mathcal{S}(M)$, on peut définir le twist de Dehn positif D_γ autour de γ comme classe d'isotopie de difféomorphismes. Le twist négatif autour de γ est bien sûr l'inverse du twist positif. On note $\mathcal{S}'(M)$ l'ensemble des classes d'isotopie de sous-variétés compactes de dimension 1 de M dont aucune composante connexe n'est homotope à 0 ou à une composante du bord. Un élément $\Gamma \in \mathcal{S}'(M)$ peut donc être identifié à une suite $(\gamma_1, \dots, \gamma_k)$ où $\gamma_1, \dots, \gamma_k \in \mathcal{S}(M)$ et $i(\gamma_h, \gamma_\ell) = 0$, $1 \leq h, \ell \leq k$. Une famille $\{\eta_1, \dots, \eta_n\}$ d'éléments de $\mathcal{S}(M)$ remplit la surface M , si pour toute classe $\gamma \in \mathcal{S}(M)$ il existe un η_i tel que $i(\gamma, \eta_i) \neq 0$; de manière équivalente [Fa, Th. 3.4, p. 133] la famille $\{\eta_1, \dots, \eta_n\}$ remplit la surface si, pour tous représentants $e_1, \dots, e_n$ de $\eta_1, \dots, \eta_n$, les composantes de $M \setminus \bigcup_{i=1}^n e_i$ sont, soit des disques ouverts, soit des anneaux (semi-ouvert) dont le bord est une composante du bord de M .

Le théorème suivant est dû à PENNER [Pe] :

THÉOREME. — Soient $\Gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_k)$ et $\Delta = (\delta_1, \dots, \delta_\ell)$ dans $\mathcal{S}'(M)$, où M est une surface compacte connexe et orientée. Supposons que $\{\gamma_1, \dots, \gamma_k, \delta_1, \dots, \delta_\ell\}$ remplissent M . Alors, tout composé en les twists de Dehn positifs autour des courbes dans Γ et en les twists de Dehn négatifs autour des courbes dans Δ , qui contient au moins une occurrence de chaque courbe dans $\{\gamma_1, \dots, \gamma_k, \delta_1, \dots, \delta_\ell\}$, définit une classe d'homotopie de difféomorphismes qui contient un difféomorphisme pseudo-Anosov.

Nous nous proposons de donner ici une démonstration qui n'utilise pas la théorie des réseaux ferroviaires. En particulier, nous ne faisons pas appel à une théorie du réseau ferroviaire dual.

Notre démonstration est, en esprit, plus proche de la démonstration de THURSTON du fait que le composé de twists autour de deux courbes, qui remplissent, est pseudo-Anosov. Nous utilisons la structure plate définie par Γ et Δ pour choisir des représentants affines par morceaux des twists. Une analyse directe montre les propriétés d'allongement des courbes. Le théorème de classification de Thurston permet de conclure. Dans la suite, nous donnons une représentation matricielle qui permet de calculer les coefficients de dilatation. Nous montrons aussi que les représentants affines par morceaux dans la structure plate sont pratiquement pseudo-Anosov.

Ce qui suit peut aussi se faire pour une surface à bord. Pour plus de clarté, nous supposons que $\partial M = \emptyset$.

Ce travail n'aurait jamais vu le jour sans l'intérêt que lui a témoigné François LAUDENBACH. Je le remercie pour cela aussi.

1. La structure plate associée à deux multicourbes

Soient $\Gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_k)$ et $\Delta = (\delta_1, \dots, \delta_\ell)$ deux multicourbes qui remplissent M . Choisissons des représentants $c_j \in \gamma_j$, $j = 1, \dots, k$ et $d_h \in \delta_h$, $h = 1, \dots, \ell$ qui minimisent les intersections géométriques, i.e.

$$\#(c_i \cap d_j) = i(\gamma_i, \delta_j), \quad \#(c_i \cap c_h) = i(\gamma_i, \gamma_h) = 0$$

et de même $\#(d_j \cap d_k) = i(\delta_j, \delta_k) = 0$.

Comme dans [FLP, exposé 13, III.1, p. 245], on définit une structure plate sur M pour laquelle les feuilletages mesurés associés à Γ et Δ apparaissent, respectivement, comme le feuilletage mesuré horizontal $\mathcal{H}$ et le feuilletage mesuré vertical $\mathcal{V}$. De plus, les c_j sont des feuilles lisses de $\mathcal{H}$ et les d_h des feuilles lisses de $\mathcal{V}$.

Cette structure plate est obtenue en recollant des carrés de côté de longueur 1, ayant chacun deux côtés horizontaux et deux côtés verticaux. Le feuilletage $\mathcal{H}$ (resp. $\mathcal{V}$) représente donc Γ (resp. Δ) dans $\mathcal{MF}(M)$.

Cette structure plate donne une métrique et une mesure des angles en chaque point, y compris les points singuliers. En un point singulier p , l'angle total autour de p est $n\pi$ ou n est le nombre de séparatrices du feuilletage horizontal (ou vertical). Remarquons que les feuilletages horizontaux et verticaux sont partout orthogonaux.

Les géodésiques de la métrique plate sont constituées de segments rectilignes (lisses) qui se joignent en des singularités. En une telle singularité, les deux angles découpés par la géodésique sont $\geq \pi$. Toute classe d'homotopie de chemins à extrémités fixées contient une unique géodésique de cette structure plate. On peut consulter [St] au sujet des géodésiques de ces structures plates; remarquons, toutefois, que nous n'utilisons pas la même convention pour mesurer les angles aux points singuliers.

Si $m \in M$ est un point régulier de la structure plate, on peut trouver une carte locale (U, x, y) , où U est un voisinage de m et $x, y : U \rightarrow \mathbb{R}$ sont deux fonctions numériques, telle que $n \mapsto (x(n), y(n))$ soit un difféomorphisme préservant l'orientation de U sur un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^2$ qui envoie m sur 0 et tel que le feuilletage mesuré horizontal (resp. vertical) y soit donné par la 1-forme fermée dy (resp. dx). Si (V, X, Y) est une autre telle carte, on a $X = -x$ et $Y = -y$ dans $U \cap V$. Il en résulte que le cône positif

$$C_+(m) = \{v \in T_m M \mid dx(v) dy(v) \geq 0\}$$

(resp. le cône négatif $C_-(m) = \{v \in T_m M \mid dx(v) dx(v) \leq 0\}$) est bien défini au point régulier m de la structure plate. Chacun de ces cônes est composé de deux secteurs (voir figure 1). En un point singulier, de la structure plate, on peut aussi définir les "cônes positifs" et négatifs de

manière analogue. En une telle singularité, un cône a n secteurs, où n est le nombre de séparatrices du feuilletage horizontal (ou vertical). Autour d'un point, les secteurs positifs et négatifs alternent.

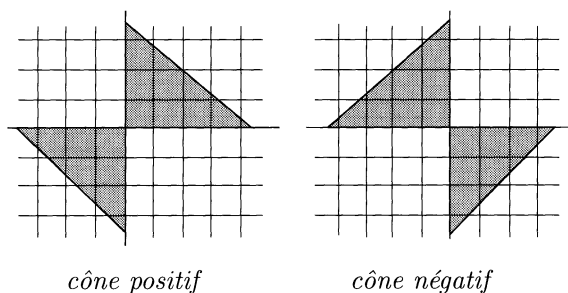


Figure 1.

Pour chaque $j = 1, \dots, k$, il est possible de représenter la classe d'isotopie du twist de Dehn positif autour de γ_j par un homéomorphisme T_j , qui est affine sur l'anneau de feuilles horizontales parallèles à c_j et est l'identité ailleurs (figure 2). De la même façon, pour chaque $h = 1, \dots, \ell$, il est possible de représenter la classe d'isotopie du twist de Dehn positif autour δ_h par un homéomorphisme S_h , qui est affine sur l'anneau de feuilles parallèles à d_h et est l'identité ailleurs.

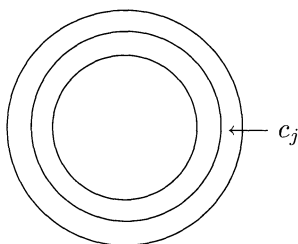


Figure 2. Le support de T_j est l'anneau de feuilles homotopes à c_j .

Le lemme suivant est évident :

LEMME 1.1. — Les homéomorphismes T_j et S_h sont affines par morceaux. De plus, l'image par T_j (resp. S_h^{-1}) d'un secteur du cône positif au point m de la structure plate est contenue dans un secteur du cône positif au point $T_j(m)$ (resp. $S_h^{-1}(m)$). De même, l'image par T_j^{-1} (resp. S_h) d'un secteur du cône négatif en m est contenue dans un secteur du cône négatif au point $T_j^{-1}(m)$ (resp. $S_h(m)$).