Bulletin
de la SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

CLASSIFICATION ANALYTIQUE DE STRUCTURES DE POISSON

Philipp Lohrmann

Tome 137
Fascicule 3

2009

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
Publié avec le concours du Centre national de la recherche scientifique
pages 321-386

Bull. Soc. math. France
137 (3), 2009, p. 321–386

CLASSIFICATION ANALYTIQUE DE STRUCTURES DE POISSON

PAR PHILIPP LOHRMANN

RÉSUMÉ. — Notre étude porte sur une catégorie de structures de Poisson singulières holomorphes au voisinage de $0 \in \mathbb{C}^n$ et admettant une forme normale formelle polynomiale i.e. un nombre fini d'invariants formels. Les séries normalisantes sont divergentes en général. On montre l'existence de transformations normalisantes holomorphes sur des domaines sectoriels de la forme $a < \arg x^R < b$, où x^R est un monôme associé au problème. Il suit une classification analytique.

ABSTRACT (*Analytic classification of Poisson structures*). — Our study deals with some singular Poisson structures, holomorphic near $0 \in \mathbb{C}^n$ and admitting a polynomial normal form, i.e. a finite number of formal invariants. Their normalizing series generally diverge. We show the existence of normalizing transformations, holomorphic on some sectorial domains $a < \arg x^R < b$, where x^R denotes a monomial associated to the problem. Follows an analytic classification.

1. Introduction

Étude locale des structures de Poisson. — Les structures de Poisson sont des généralisations naturelles du crochet de Poisson sur une variété symplectique :

Texte reçu le 8 janvier 2008, révisé le 4 novembre 2008 et le 6 février 2009, accepté le 14 mai 2009

PHILIPP LOHRMANN, Universität Zürich, Institut für Mathematik, Winterthurerstr. 190, 8057 Zürich, Suisse • *E-mail :* `philipp.lohrmann@math.uzh.ch`

Classification mathématique par sujets (2000). — 58D27, 34M40, 40A05, 53D17, 32S99.

Mots clefs. — Phénomène de Stokes, singularités, sommabilité, formes normales, structures de Poissson.

soient M une variété analytique (pas nécessairement de dimension paire) et C_p^ω l'anneau des germes en $p \in M$ de fonctions holomorphes sur M. Une structure de Poisson sur M est la donnée, en tout point $p \in M$, d'un crochet $\{.,.\} : C_p^\omega \times C_p^\omega \to C_p^\omega$ bilinéaire, antisymétrique tel que pour tout $f, g, h \in C_p^\omega$ les applications $\{f, .\}$ et $\{., f\}$ soient des dérivations de C_p^ω, et tel que l'identité de Jacobi $\{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} = 0$ soit satisfaite. En coordonnées locales une structure de Poisson est définie moyennant un champ de bivecteurs $\Pi = \sum_{i<j} \Pi_{ij}(x)\, \partial_i \wedge \partial_j$ où on pose $\partial_i := \partial/\partial x_i$. Le crochet $\{f, g\}$ associé est la contraction du 2-tenseur contravariant Π avec les 1-tenseur covariant df et dg i.e.

$$\{f, g\} = \sum_{i<j} \Pi_{ij}(x)(\partial_i f\, \partial_j g - \partial_i g\, \partial_j f).$$

Du fait de l'identité de Jacobi on doit avoir $\sum_{l=1}^{n} (\Pi_{il}\partial_l(\Pi_{jk}) + \Pi_{jl}\partial_l(\Pi_{ki}) + \Pi_{kl}\partial_l(\Pi_{ij})) = 0$ pour tout $1 \le i, j, k \le n$ (n désigne la dimension de la variété sous-jacente M). Soit $f \in C^\omega$. On appelle *champ hamiltonien de f relatif à* Π le champ de vecteurs X_Pi tel que $\mathcal{L}_{X_\Pi}(g) = \{f, g\}$ pour tout $g \in C^\omega$, soit

$$X_\Pi = \sum_{i<j} \Pi_{ij}\, [\partial_i(f)\, \partial_j - \partial_j(f)\, \partial_i] \tag{1.1}$$

en coordonnées locales.

Remarque. — La différence d'une structure de Poisson et d'une structure symplectique consiste dans le fait que le rang d'une structure de Poisson Π (= le rang de la matrice (Π_{ij})) n'est pas nécessairement localement constant et peut différer de la dimension de la variété sous-jacente M. Dans ce cas ils existent des *fonctions de Casimir*, i.e. des fonctions non-constantes f telles que $\{f, .\} = 0$.

L'étude locale des structures de Poisson se ramène à l'étude des structures de Poisson nulles à l'origine. En effet, A. Weinstein [22] a démontré un théorème à la Darboux pour les structures de Poisson : pour tout $p \in M$ il existe deux entiers r et s avec $n = 2r + s$, ainsi que des coordonnées holomorphes locales $(p_1, \dots, p_r, q_1, \dots, q_r, x_1, \dots, x_s)$ telles que

$$\Pi = \sum_{1 \le i < j \le r} \partial_{p_i} \wedge \partial_{q_i} + \sum_{1 \le i < j \le s} \pi_{ij}(x) \partial_{x_i} \wedge \partial_{x_j},$$

où π_{ij} désignent des fonctions holomorphes sur $(\mathbb{C}^s, 0)$ s'annulant en 0.

Les structures de Poisson qui s'annulent en $0 \in \mathbb{C}^n$ et qui apparaissent de manière structurellement stable se divisent en deux catégories : la première formée des structures de Poisson possédant une partie linéaire non-nulle qui sont de la forme $\Pi = \sum_{i,j} l_{ij}(x) \partial_{x_i} \wedge \partial_{x_j} + t.o.s.$, où l_{ij} désigne des formes linéaires sur $\mathbb{C}^n$, et t.o.s. des termes d'ordre supérieur à l'origine. Ces structures de Poisson ont fait l'objet de nombreux études en catégorie formelle, holomorphe et C^∞. Citons le célèbre résultat de J. Conn [4] en catégorie holomorphe et C^∞ d'après lequel on a une conjugaison vers la partie linéaire si l'algèbre de Lie associé à la partie linéaire sur le cotangent est semi simple. Parmi les nombreux autre résultats mentionnons celui de Stolovitch [18] qui concerne la conjugaison holomorphe vers une forme normale dans certains cas non formellement linéarisables.

La deuxième classe de structures de Poisson structurellement stables est celle des structures de Poisson à 1-jet nul i.e. à partie linéaire nulle, mais à partie quadratique non nulle – de la forme $\Pi = \sum_{i,j} q_{ij}(x)\partial_{x_i} \wedge \partial_{x_j} + t.o.s.$, où on désigne par q_{ij} des formes quadratiques sur $\mathbb{C}^n$. Après avoir étés étudiés la première fois par Arnold [1] ils ont fait l'objet de nombreuses études dans les années 90 – on renvoie le lecteur au livre de Dufour-Zung [6] et à la bibliographie qui s'y trouve.

En particulier, Dufour et Wade ont donné [5] une notion de *forme normale formelle* pour les structures de Poisson à 1-jet nul très similaire à celle de Poincaré-Dulac pour les champs de vecteurs – cf. section 2.

Classification analytique et formelle. — Dans [9], l'auteur de cet article à montré un théorème à la Bruno pour les structures de Poisson : soit Π une structure de Poisson à 1-jet nul. Il existe un biholomorphisme $\Phi : (\mathbb{C}^n, 0) \to (\mathbb{C}^n, 0)$ tel que $\Phi^*(\Pi)$ soit une forme normale (au sens de Dufour-Wade) si deux conditions sont satisfaites :

- une condition de *petits diviseurs diophantiens* (D), associés à la partie quadratique de Π,
- une *condition algébrique (C) sur la forme normale formelle* de Π : l'ensemble des fonctions de Casimir relatifs à la forme normale formelle doit coïncider avec celui par rapport à la partie quadratique.

Une forme normale peut être considérée comme un représentant d'une classe de conjugaison. Si (C) et (D) sont satisfaites les classes de conjugaisons analytiques coïncident donc avec les classes de conjugaison formelles. Dans cet article on montre que si condition (C) n'est pas satisfaite, *les séries normalisantes divergent en général.* On donne (cf. section 6) un exemple d'une structure de Poisson très simple Π qui ne satisfait pas condition (C) et qui admet une forme normale polynomiale. De plus toute transformation normalisant Π diverge et la classification analytique ne se réduit pas à la classification formelle. L'objet de cet article est une classification analytique pour des structures de Poisson à un jet nul satisfaisant un certain nombre de conditions techniques. Les hypothèses faites ne sont pas les plus simples possibles, le but étant de montrer le phénomène de Stokes.

Notre démarche pour la classification analytique est la suivante : dans le but d'avoir un nombre fini d'invariants formels, on cherche d'abord (cf. section 4) les conditions les plus simples possibles assurant une forme normale polynomiale : on considère des structures de Poisson de la forme $\Pi = \Pi^2 + x^R\Pi^R + t.o.s.$ de partie quadratique Π^2 1-résonnante – i.e. l'anneau des fonctions de Casimir formelles par rapport à la partie quadratique Π^2 est engendré par le monôme x^R, appelé générateur de résonances. On suppose $\Pi^R = S \wedge C$ où S, C désignent des champs de vecteurs linéaires diagonaux tels que $\mathcal{L}_S(x^R) = 0$ et $\mathcal{L}_C(x^R) \neq 0$. Les divergences des séries conjuguant Π à la forme normale formelle $\Pi^2 + x^R\Pi^R$ sont alors portées par x^R.

Pour assurer que le caractère de structure de Poisson soit préservé par multiplication par une fonction, on suppose que la forme normale $\Pi^2 + x^R\Pi^R$ soit produit extérieur de deux champs de vecteurs. En effet, on ne pourra faire une classification qu'à multiplication par une unité analytique près.

Analyse. — On montre qu'ils existent des transformations normalisantes (avec un développement asymptotique divergent en $0 \in \mathbb{C}^n$) qui sont holomorphes sur certains *domaines sectoriels* DS_s, $s = 0, 1$, de la forme $a < \arg x^R < b$. Ces transformations nous permettent d'associer une *isotropie sectorielle* à chaque structure de Poisson appartenant à une classe de conjugaison formelle donnée. Le groupe des isotropies sectorielles, qui sert d'espace classifiant, consiste en les transformations holomorphes sur $DS_0 \cap DS_1$ préservant la forme normale. Ils sont infiniment plats à l'origine.

Synthèse. — Une démarche, inventée par Martinet, Ramis et Malgrange [11] [12] permet de synthétiser une classe de conjugaison analytique à partir d'une isotropie sectorielle d'une forme normale donnée. Cette démarche est basée sur le théorème d'intégrabilité des structures presque-complexes de Newlander-Nirenberg.

Remarque. — Les transformations normalisantes Φ_s, $s = 0, 1$ qu'on donne sont les mêmes que ceux utilisées par Stolovitch dans [16] pour conjuguer certains champs de vecteurs vers une forme normale. Stolovitch a montré que ces transformations sont des limites de suites de transformations de la forme $(1 + X_i)$, où chaque X_i est la 1-somme (au sens de Ramis – cf. [14]) d'une série formelle divergente, sur un secteur d'ouverture strictement supérieur à 2π. Mais l'intersection ces secteurs n'est en général plus d'ouverture *strictement* supérieur à 2π. Ceci signifie que les transformations Φ_s ne sont en général plus des 1-sommes au sens de Ramis. En absence de certains petits diviseurs, Stolovitch et Braaksma ont montrés dans [2] que les transformations Φ_s, $s = 0, 1$, sont des 1-sommes d'une série divergente.