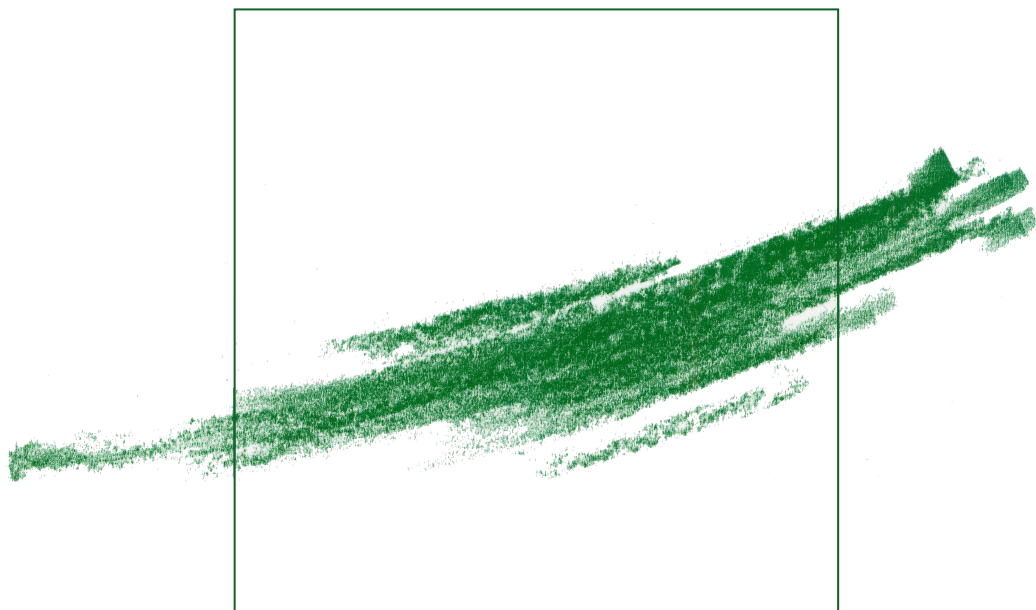


C O U R S   S P É C I A L I S É S  
C O L L E C T I O N   S M F

# Stochastic properties of dynamical systems

Françoise PÈNE



30

### *Comité de rédaction*

Raphaël CÔTE  
Cyril DEMARCHE  
Romain DUJARDIN  
Olivier GUICHARD

Thierry LÉVY  
Bertrand MAURY  
Alain VALETTE

Sophie GRIVAUX (Rédactrice en chef)

### *Diffusion*

Maison de la SMF  
Case 916 - Luminy  
13288 Marseille Cedex 9  
France  
commandes@smf.emath.fr

AMS  
P.O. Box 6248  
Providence RI 02940  
USA  
www.ams.org

### *Tarifs*

*Vente au numéro* : 54 € (\$ 81)

Des conditions spéciales sont accordées aux membres de la SMF.

### *Secrétariat*

Cours Spécialisés

Société Mathématique de France

Institut Henri Poincaré, 11, rue Pierre et Marie Curie

75231 Paris Cedex 05, France

Tél : (33) 01 44 27 67 99

• Fax : (33) 01 40 46 90 96

cours\_specialises@smf.emath.fr

• <http://smf.emath.fr/>

© Société Mathématique de France 2022

*Tous droits réservés (article L 122-4 du Code de la propriété intellectuelle). Toute représentation ou reproduction intégrale ou partielle faite sans le consentement de l'éditeur est illicite. Cette représentation ou reproduction par quelque procédé que ce soit constituerait une contrefaçon sanctionnée par les articles L 335-2 et suivants du CPI.*

ISSN 1284-6090

ISBN 978-2-85629-967-8

Directeur de la publication : Fabien DURAND

---



**AN INTRODUCTION TO THE STUDY  
OF THE STOCHASTIC PROPERTIES  
OF DYNAMICAL SYSTEMS**

**Françoise Pène**

COURS SPÉCIALISÉS 30

**AN INTRODUCTION TO THE STUDY  
OF THE STOCHASTIC PROPERTIES  
OF DYNAMICAL SYSTEMS**

**Françoise Pène**

**Société Mathématique de France 2022**

*Françoise Pène*  
UBO, UFR Sciences et Techniques  
Département de Mathématiques  
6 avenue Le Gorgeu  
29238 Brest cedex 3

---

**Mathematical Subject Classification (2010).** — 37-00, 37A25, 37A30, 60F05, 60G42, 47A55.

**Keywords.** — Recurrence, ergodicity, mixing, Markov, operator, quasi-compactness, martingale method, Nagaev-Guivarc'h method, Keller-Liverani perturbation theorem, decorrelation, Lindeberg method, central limit theorem.

**Mots-clefs.** — Récurrence, ergodicité, mélange, Markov, opérateur, quasi-compacité, méthode de martingales, méthode de Nagaev-Guivarc'h, théorème de perturbation de Keller-Liverani, décorrelation, méthode de Lindeberg, théorème central limite.

---

# AN INTRODUCTION TO THE STUDY OF THE STOCHASTIC PROPERTIES OF DYNAMICAL SYSTEMS

Françoise Pène

*Abstract.* — This book provides an introduction to the study of the stochastic properties of probability preserving dynamical systems. Only the usual knowledge of the first year of a Master's degree is required. Many reminders are given. The definitions and results are illustrated by examples and corrected exercises. The book presents the notions of Poincaré's recurrence, of ergodicity, of mixing. It enlightens also existing links between dynamical systems and Markov chains. The final objective of this book is to present three methods for establishing central limit theorems in the context of chaotic dynamical systems: a first method based on martingale approximations, a second method based on perturbation of quasi-compact linear operators and a third method based on decorrelation estimates.

*Résumé (Une introduction à l'étude des propriétés stochastiques des systèmes dynamiques).* — Ce livre est un ouvrage introductif à l'étude des propriétés stochastiques des systèmes dynamiques chaotiques préservant une mesure de probabilité. Les prérequis de ce livre sont les connaissances usuellement enseignées en première année de Master en Mathématiques (ce livre contient de plus des rappels de niveau Bac+4). Les définitions et les résultats contenus dans cet ouvrage sont illustrés par des exemples et des exercices corrigés. Le livre commence par une présentation des notions classiques dans l'étude des systèmes dynamiques telles que la notion de mesure invariante, le théorème de récurrence de Poincaré, les propriétés d'ergodicité et de mélange, la notion d'isomorphisme. Il met également en évidence les liens existants entre les systèmes dynamiques et les chaînes de Markov. L'objectif final de ce livre est de présenter trois méthodes permettant d'établir des théorèmes centraux limites dans le cadre des systèmes dynamiques chaotiques : une première méthode basée sur les approximations martingales, une deuxième méthode basée sur la perturbation d'opérateurs quasi-compacts et une troisième méthode basée sur des estimées de décorrélation.





# CONTENTS

<b>Preamble</b> .....	xiii
<b>Introduction</b> .....	xv
<b>List of Symbols</b> .....	xxi
<b>1. Probability preserving dynamical systems, recurrence, ergodicity, mixing</b> .....	1
1.1. Dynamical system, invariant measure .....	1
1.1.1. Definition of probability preserving dynamical systems .....	1
1.1.2. First examples .....	2
1.2. Recurrence .....	5
1.3. Ergodicity .....	7
1.3.1. Definition of ergodicity by visits to sets of positive measure .....	7
1.3.2. Link between ergodicity and density of orbits .....	7
1.3.3. Characterization of ergodicity by (sub)-invariant sets and invariant functions .....	8
1.3.4. Characterization of ergodicity by almost surely (sub)-invariant sets and almost surely invariant functions .....	10
1.3.5. ★ Ergodicity and Birkhoff sums .....	14
1.4. Mixing .....	15
1.4.1. Definition and properties .....	16
1.4.2. Examples of mixing and non mixing dynamical systems .....	18
1.5. Exercises .....	21
1.6. Solutions of the exercises .....	23
<b>2. Factors, extensions, isomorphisms</b> .....	33
2.1. Definitions and first examples .....	33
2.2. Properties preserved by factorization .....	35
2.3. Natural extension .....	36
2.4. Exercises .....	42
2.5. Solutions of the exercises .....	43
<b>3. Stationary processes, Markov chains, Transfer operator</b> .....	49
3.1. Stationary processes and dynamical systems .....	49
3.2. Markov chains, stationary measures .....	50

3.2.1. Markov operator and Markov properties .....	51
3.2.2. Stationary measures of Markov chains .....	53
3.3. Transfer operator of a dynamical system .....	55
3.3.1. Definitions and first properties .....	55
3.3.2. Invariant measures and transfer operator .....	60
3.4. Exercises on dynamical systems isomorphic to Markov chains .....	70
3.5. Solutions of the exercises .....	73
<b>4. Ergodic theorems, asymptotic variance .....</b>	<b>83</b>
4.1. The von Neumann ergodic Theorem .....	84
4.2. The Birkhoff ergodic theorem .....	87
4.3. Asymptotic variance .....	91
4.4. Exercises .....	94
4.5. Solutions of the exercises .....	97
<b>5. Martingale approximation method .....</b>	<b>105</b>
5.1. Reversed martingales .....	106
5.2. Central Limit Theorem for reversed martingales and applications .....	109
5.3. Martingale-coboundary decomposition .....	114
5.4. Non-degeneracy of the Gaussian limit .....	122
5.5. Other limit theorems .....	123
5.6. Exercises .....	125
5.7. Solutions of the exercises .....	126
<b>6. Quasi-compactness of transfer operators .....</b>	<b>131</b>
6.1. Review of spectral theory .....	133
6.2. A variant of the Ionescu Tulcea and Marinescu theorem .....	136
6.2.1. Application .....	138
6.2.2. Proof of Theorem 6.7 .....	139
6.3. ★ Further spectral theory: Essential spectrum and quasi-compact operators .....	145
6.3.1. ★ Essential spectrum and decomposition of quasi-compact operators .....	145
6.3.2. ★ Other characterizations of the essential spectral radius .....	151
6.3.3. ★ Quasi-compactness and Doeblin Fortet type Condition .....	155
6.4. Application to the study of dynamical systems .....	157
6.5. Exercise .....	160
6.6. Solution of the exercise .....	162
<b>7. The Nagaev-Guivarc'h operator perturbation method .....</b>	<b>169</b>
7.1. A perturbation theorem based on the implicit function theorem .....	171
7.2. Application to the Central Limit Theorem .....	175
7.3. Exercises .....	180
7.4. ★ The Keller and Liverani perturbation theorem .....	181
7.4.1. ★ Continuity of the resolvent .....	183

7.4.2. ★ Continuity of the dimension of the generalized eigenspaces . . . . .	188
7.4.3. ★ Proof of Theorem 7.8 . . . . .	190
7.5. ★ Exercises . . . . .	191
7.6. Solutions of the exercises . . . . .	194
<b>8. ★ Central Limit Theorem via decorrelation . . . . .</b>	<b>209</b>
8.1. ★ Central Limit Theorem under a general decorrelation assumption . . .	211
8.2. ★ A general strategy to prove the decorrelation assumptions using conditioning . . . . .	219
8.3. ★ Central Limit Theorem in a general (partially) hyperbolic context . . .	221
8.4. ★ Application to ergodic toral automorphisms . . . . .	224
8.4.1. ★ Exponential rate of decorrelation for Hölder observables . . . . .	228
8.4.2. ★ Proof of the exponential convergence of conditional expectations	232
8.5. ★ Solutions of the exercises . . . . .	237
<b>Bibliography . . . . .</b>	<b>243</b>
<b>Index . . . . .</b>	<b>251</b>