

PERSPECTIVE HISTORIQUE SUR LES RAPPORTS ENTRE LA THÉORIE DES MODÈLES ET L'ALGÈBRE.

UN POINT DE VUE TENDANCIEUX

Daniel LASCAR (*)

RÉSUMÉ. — Je vais traiter, d'un point de vue personnel, la naissance et les premiers développements de la théorie des modèles pendant la période qui s'étend de sa naissance vers 1870, avec les travaux de Peirce, jusqu'au théorème de Morley vers 1965. J'insisterai particulièrement sur l'aspect « algèbre universelle » et j'essaierai de dégager comment la notion de définissabilité a fait évoluer cette théorie jusqu'à une science complexe pouvant apporter de nouvelles idées au reste des mathématiques.

ABSTRACT. — AN HISTORICAL PERSPECTIVE ON THE RELATIONSHIP BETWEEN MODEL THEORY AND ALGEBRA : A TENDENTIOUS VIEWPOINT. — This article presents a personal point of view dealing with the theory of models from its birth, with Peirce's work around 1870, to Morley's theorem in 1965. It insists particularly on "universal algebras" and explains how this theory evolved through the notion of definability towards a complex science able to infuse the rest of mathematics with new ideas.

La théorie des modèles est traditionnellement, et à juste titre, considérée comme faisant partie de la logique mathématique. Pourtant, les différences avec les autres parties de cette discipline, et je pense notamment à la théorie de la démonstration ou à l'étude des logiques non classiques, se font de plus en plus évidentes. Lorsqu'on examine la théorie des modèles actuelle, on s'aperçoit que la logique (entendez : l'analyse du langage mathématique) n'y a en fait qu'une place modeste. Les objets de son étude sont ceux des mathématiques dites classiques (structures, groupes, et même les nombres réels, complexes, etc.), contrairement, en reprenant un des exemples précédents, à la théorie de la démonstration, qui analyse

(*) Texte reçu le 19 novembre 1997, révisé le 15 décembre 1998.

Daniel LASCAR, C.N.R.S., Équipe de Logique Mathématique, UPRESA 7056, Université Paris 7, Denis Diderot, 2 place Jussieu 75251, PARIS CEDEX 05.
Courrier électronique : lascar@logique.jussieu.fr.

le raisonnement mathématique, et en ce sens mérite bien mieux sa place au sein de la logique mathématique. Je mets à part ici, des disciplines comme l'étude des modèles des logiques non classiques ou celle des modèles du λ -calcul.

Chang et Keisler [1973] ont défini la théorie des modèles par l'équation

$$\textit{Théorie des modèles} = \textit{Algèbre universelle} + \textit{Logique}$$

à laquelle je préfère

$$\textit{Théorie des modèles} = \textit{Algèbre universelle} + \textit{Logique}$$

Dans cette équation il faut prendre le terme « Algèbre universelle » dans le sens « d'étude générale des structures algébriques ». En effet un des aspects de la théorie des modèles est de dégager les rapports cachés existant entre différentes disciplines mathématiques, le plus souvent algébriques. On est bien obligé de constater que nombre de théoriciens des modèles concentrent leur activité sur un type de structures particulier, par exemple les corps ou même les corps valués. Personnellement, je dirais plutôt que le théoricien des modèles est un mathématicien qui s'écoute parler. Il s'intéresse aux mêmes objets que le mathématicien classique : entiers naturels, nombres réels, groupes, corps, etc. Mais, il est conscient, par exemple, que le langage qui est nécessaire à la définition d'un corps valué est beaucoup plus simple que celui requis pour définir un anneau noëthérien. Et ces faits, il sait les exploiter.

La théorie des modèles est, depuis déjà longtemps, une discipline autonome avec sa problématique propre et possédant un corps de résultats important. Je pense qu'une nouvelle étape a été franchie récemment avec la preuve de la conjecture géométrique de Mordell-Lang en toute caractéristique par E. Hrushovski [1996]. Ses travaux sur la conjecture de Manin-Mumford semblent montrer que, loin d'être en présence d'un fait isolé, on assiste à l'émergence de méthodes nouvelles en géométrie algébrique et diophantienne.

C'est un peu pour comprendre comment une discipline originellement développée pour étudier les rapports entre le langage et les structures algébriques est parvenue à apporter quelque chose de nouveau à une discipline aussi élaborée que la géométrie algébrique que je vais essayer de traiter, d'un point de vue personnel, la naissance et les premiers

balbutiements de cette théorie, pendant la période qui s'étend de Peirce à Morley. Mon but n'est pas de donner un compte rendu historique et exhaustif de cette période. Je suis convaincu que les apports vraiment originaux de la théorie des modèles au reste des mathématiques se trouvent dans la notion de définissabilité (je devrais certainement ajouter la notion d'interprétabilité; mais celle-ci ne s'est imposée que plus tard et est d'un caractère plus technique, aussi ne la mentionnerai-je plus). C'est sur cette notion de définissabilité que je me concentrerai, ce qui me fera négliger de vastes pans de la théorie des modèles.

J'ai distingué quatre grandes périodes : durant la première, on assiste à l'élaboration des concepts de base de la théorie; dans la seconde, on voit comment le premier problème de la théorie s'est posé et a été résolu, et le rôle moteur qu'ont joué ses généralisations; c'est au cours de la troisième que l'acte de naissance est clairement établi et que les ambitions de la théorie sont énoncées; dans la quatrième, la problématique change et la théorie devient vraiment adulte¹. Tout compte fait, je ne ferai allusion qu'à un petit nombre d'articles. Il m'a fallu être injuste dans le choix de ces articles ainsi que dans le choix des titres des différentes sections de cet article.

CHARLES SANDERS PEIRCE ET ERNST SCHRÖDER

Il est classique, et je pense tout à fait justifié, de faire remonter l'origine de la théorie des modèles à Charles Sanders Peirce.

Le titre de l'article de Peirce paru en 1870 est tout à fait explicite : «*Description of a notation for logic of relatives, resulting from an amplification of the conception of Boole's calculus of logic*» [Peirce 1870]. Il s'agit donc avant tout d'un système de notations, c'est-à-dire de l'élaboration d'un langage pour une théorie à venir. On connaît évidemment l'importance de ce genre de travail, mais il n'y a pas dans cet article, à proprement parler, de résultats mathématiques significatifs.

¹ Pour ce travail, j'ai utilisé [Heijenoort 1967], les notes historiques de [Hodges 1993] et les articles [Vaught 1971], [Chang 1971] et [Thiel 1977]. Je remercie Monsieur Markus Junker : son aide m'a été indispensable lorsqu'il s'est agi de consulter les livres et les articles en langue allemande, et en particulier le livre de Schröder, et Monsieur Gabriel Sabbagh pour ses remarques pertinentes. Les rapporteurs de cet article m'ont aussi permis d'éviter un certain nombre d'erreurs historiques et m'ont poussé, par leurs remarques, à une réflexion plus profonde.

Par ailleurs, il s'agit d'une généralisation du travail de Boole [1847]. Afin de mieux apprécier la distance qu'il reste à parcourir, je vais exposer, très rapidement, en quoi consiste la « logique des relations » (*logic of relatives*).

G. Boole avait inventé le calcul propositionnel en vue d'analyser ce qu'il appelait les lois de la pensée. Son calcul est construit à l'aide de variables propositionnelles (ce ne sont que des lettres, A , B , C par exemple, censées représenter des assertions qui peuvent être vraies ou fausses) qui sont reliées entre elles par des connecteurs propositionnels (la conjonction, la disjonction, la négation, l'implication). Il obtenait ainsi les formules propositionnelles, par exemple $A \wedge B$ (lire A et B), $B \Rightarrow \neg C$ (B implique non C).

Les quantificateurs (pour tout, il existe) échappaient à son calcul. Pour remédier à cette déficience, Peirce affecte les variables propositionnelles d'un ou plusieurs indices² qui peuvent parcourir un ensemble I . On obtient par exemple A_i ou A_{ij} . Il peut alors introduire de nouvelles opérations, dont les plus importantes, en ce qui nous concerne, sont :

- le produit $\prod_i A_i$ qui correspond à ce que nous appelons de nos jours le quantificateur universel,
- la somme $\sum_i A_i$ qui correspond au quantificateur existentiel.

Ainsi, l'assertion « tous les hommes sont mortels » si chère aux philosophes, se formalise par $\prod_i A_i$ où A_i exprime que l'individu i est mortel (c'est-à-dire prend la valeur 1 si i est mortel, 0 sinon) et le produit est pris sur l'ensemble de tous les hommes. Dans un sens, on n'est pas très éloigné du calcul des prédicats actuel : il y a peu de différences entre $\prod_i A_i$ et $\forall x Ax$ (cependant, il n'y a rien qui corresponde à nos symboles de fonction). On peut évidemment composer ces opérations entre elles, et les composer avec les connecteurs booléens habituels. On obtient ainsi ce que l'on appelle aujourd'hui les formules du premier ordre.

En poussant le parallèle calcul booléen/calcul des relations plus loin,

² Peirce attribuera plus tard à Mitchell [1883] l'idée d'adjoindre des indices à des variables propositionnelles. Mais en fait, Mitchell, toujours d'après Peirce, n'envisage que deux indices, l'un pour exprimer que la proposition à laquelle il s'applique est toujours vraie, et l'autre pour exprimer qu'elle est toujours fausse. C'est évidemment insuffisant.

on retrouve naturellement la notion de structure. En effet, qu'entendons-nous par structure? Prenons l'exemple d'une seule relation binaire. Une structure dont le type de similarité (voir plus loin) consiste en une seule relation binaire est un ensemble, disons X (pour des raisons techniques, il faut préciser «*non vide*») muni d'un sous-ensemble R de X^2 . Dans le cas d'un ensemble ordonné par exemple, R est l'ensemble des couples (x, y) tels que $x < y$. Il peut y avoir plusieurs relations binaires ou/et des relations n -aires (correspondant à des sous-ensembles de X^n). La donnée, pour chaque entier n du nombre de relations n -aires dont on exige la présence constitue le *type de similarité* de la structure (mais, certainement à cause de la laideur de cette expression, on préfère parler, à tort, du *langage* de la structure). En fait, il faut aussi des applications de X^n dans X (par exemple dans un groupe, il nous faut la multiplication, qui est une application de X^2 dans X). Mais nous allons oublier ces applications, car, comme nous l'avons dit, elles n'apparaissent pas encore dans le langage de Peirce. Il faut aussi remarquer que cette notion de structure est purement du domaine de l'algèbre universelle.

Pour déterminer si une formule du calcul booléen est vraie ou non, il faut donner une valeur de vérité à chacune des variables propositionnelles apparaissant dans la formule. Il faut faire exactement la même chose ici : par exemple dans le cas d'un triple indice, il faut dire, pour chaque triplet d'indices i, j et k dans I si A_{ijk} est vraie ou non.

Le fait d'assigner une valeur de vérité à A_{ijk} pour chaque triplet (i, j, k) de I définit en fait une structure dont l'ensemble de base est I et dont le type de similarité est constitué d'une relation ternaire, celle qui est définie par

$$(i, j, k) \in R \text{ si et seulement si } A_{ijk} \text{ prend la valeur } 1.$$

En poursuivant notre exemple, pour des indices j et k donnés dans I , la formule

$$\prod_i A_{ijk}$$

sera vraie (prendra la valeur 1) si pour tout i dans I , $A_{i,j,k}$ prend la valeur 1.

En conclusion, étant donné une structure M d'un certain type de similarité τ , on peut considérer les formules construites à partir d'un