

# QUELQUES ASPECTS DES SYSTÈMES DYNAMIQUES POLYNOMIAUX

**S. Cantat, A. Chambert-Loir, V. Guedj**



Panoramas et Synthèses

Numéro 30

2010

**SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE**  
Publié avec le concours du Centre national de la recherche scientifique

## QUELQUES ASPECTS DES SYSTÈMES DYNAMIQUES POLYNOMIAUX

---

### INTRODUCTION

*par*

Serge Cantat

---

Ce volume regroupe quatre articles concernant l'itération des transformations polynomiales ou rationnelles des variétés projectives. Le but n'est pas d'établir un panorama global de la dynamique des transformations rationnelles, mais de présenter quelques problèmes qui se situent au confluent de la géométrie algébrique, de la géométrie diophantienne, des systèmes dynamiques et de l'analyse harmonique.

En guise d'introduction, nous partirons d'une question de géométrie diophantienne formulée par le père des systèmes dynamiques, Henri Poincaré. Ceci nous conduira à présenter plusieurs concepts qui joueront un rôle central tout au long de ce volume.

**Courbes elliptiques et variétés abéliennes.** – Soit  $A$  une courbe cubique lisse du plan projectif, qui est définie par une équation homogène à coefficients rationnels et qui est munie d'au moins un point à coordonnées rationnelles. Par un changement de coordonnées linéaire à coefficients rationnels, l'équation de  $A$  peut être mise sous forme de Weierstrass,

$$y^2z = 4x^3 + axz^2 + bz^3,$$

où  $a$  et  $b$  sont rationnels et  $[x : y : z]$  désigne les coordonnées homogènes obtenues après ce changement de variables. L'ensemble des solutions complexes de cette équation forme une surface de Riemann  $A(\mathbf{C})$  qui est holomorphiquement difféomorphe au quotient de la droite complexe  $\mathbf{C}$  par un réseau cocompact  $\Lambda$ , (voir [11], [14])

$$A(\mathbf{C}) = \mathbf{C}/\Lambda.$$

Nous pouvons choisir cet isomorphisme pour que la classe de l'origine  $0 \in \mathbf{C}$  modulo  $\Lambda$  corresponde au point  $[0 : 1 : 0]$  de  $A$ . On munit ainsi  $A(\mathbf{C})$  d'une structure de groupe additif issue de celle de  $(\mathbf{C}, +)$  pour laquelle  $[0 : 1 : 0]$  est l'élément neutre. Ces choix étant faits, trois points  $P_1$ ,  $P_2$  et  $P_3$  de  $A(\mathbf{C})$  ont une somme nulle si, et seulement s'ils sont alignés dans  $\mathbb{P}^2(\mathbf{C})$ . Ainsi, l'inverse  $-M$  d'un point  $M$  est obtenu en prenant son symétrique par rapport à l'axe des  $x$ .

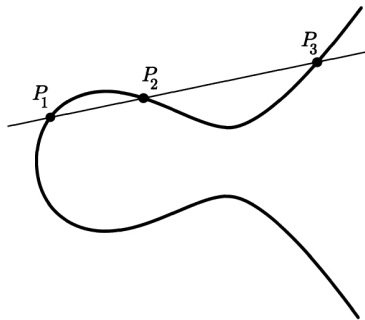


FIGURE 1. Addition sur une cubique.

Lorsque  $P_1$  et  $P_2$  sont des points de  $A(\mathbf{Q})$ , le troisième point d'intersection de la droite  $(P_1P_2)$  avec  $A$  est à coordonnées rationnelles. L'ensemble  $A(\mathbf{Q})$  des points rationnels de  $A$  forme donc un sous-groupe de  $(A(\mathbf{C}), +)$ . En 1901, Poincaré définit le rang de la courbe  $A$  comme étant celui du groupe abélien  $A(\mathbf{Q})$  puis s'interroge sur les valeurs possibles de ce nombre (voir [13]) :

« Quelles valeurs peut-on attribuer au nombre entier que nous avons appelé rang d'une cubique rationnelle ? Quelles sont, parmi les catégories que nous venons d'énumérer et qui sont jusqu'ici logiquement possibles, celles qui existent réellement ? »

Cette question est encore largement ouverte. Le premier résultat important affirme que le rang de  $A$  est fini. Il est dû à Mordell, en 1922. Plus généralement, si  $A$  est une variété abélienne de dimension  $k$ , c'est-à-dire une variété projective pour laquelle  $A(\mathbf{C})$  est isomorphe à un quotient compact du groupe  $\mathbf{C}^k$ , et si  $A$  est définie sur un corps de nombres  $\mathbb{L}$ , alors  $A(\mathbb{L})$  est un groupe abélien de type fini. Ce théorème est dû à Weil, en 1928.

Une des idées mises au point dans ce contexte est au cœur du présent ouvrage : il s'agit d'introduire la notion de hauteur d'un point rationnel, et d'étudier le comportement de la hauteur d'un point  $z$  de  $A(\mathbf{Q})$  lorsque celui-ci est changé en l'un de ses multiples  $mz$ , avec  $m \in \mathbf{Z}$ .

**Hauteurs et itérations.** – Soit  $p$  un point de l'espace projectif  $\mathbb{P}^k(\mathbf{Q})$ . Ce point possède alors des coordonnées homogènes entières  $[x_0 : x_1 : \dots : x_k]$  qui sont globalement premières entre elles ; un tel choix de coordonnées est unique à multiplication près de celles-ci par  $-1$ . La hauteur  $h(p)$  de  $p$  est alors définie par

$$h(p) = \log \max_{i=0, \dots, k} (|x_i|) ;$$

elle décrit le nombre de chiffres qui apparaît dans l'écriture de  $p$  à l'aide de coordonnées entières.

Lorsque  $W$  est une sous-variété de l'espace projectif qui est définie sur  $\mathbf{Q}$ , la hauteur peut être restreinte à  $W(\mathbf{Q})$ . Ce procédé fournit donc une hauteur permettant de

mesurer la taille des points de  $W(\mathbf{Q})$ , ceci pour chaque plongement de  $W$  dans un espace projectif (défini sur  $\mathbf{Q}$ ).

Reprenons l'exemple d'une variété abélienne  $A$ , définie sur  $\mathbf{Q}$ , et désormais munie d'une hauteur  $h : A(\mathbf{Q}) \rightarrow \mathbf{R}^+$ . La multiplication par un entier  $m$  sur le groupe additif  $A(\mathbf{C})$  produit un endomorphisme  $f_m$  de  $A$  qui permute les points de  $A(\mathbf{Q})$ . Il se trouve que la fonction

$$|h(f_m(p)) - m^2 h(p)|$$

est bornée sur  $A(\mathbf{Q})$ . Suivant une astuce de Tate datant de 1964 (voir [9]), la limite

$$\hat{h}(p) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{m^{2n}} h((f_m)^n(p))$$

détermine une fonction sur  $A(\mathbf{Q})$  pour laquelle

1.  $\hat{h}(f(p)) = m^2 \hat{h}(p)$  pour tout point  $p$  de  $A(\mathbf{Q})$  ;
2.  $|\hat{h} - h|$  est bornée sur  $A(\mathbf{Q})$ .

La hauteur  $\hat{h}$  associée à  $f_m$  est appelée *hauteur canonique*, ou hauteur de Tate de  $f_m$ .

Voici un autre exemple pour lequel la hauteur peut être modifiée par un procédé itératif afin de lier ses propriétés arithmétiques à la dynamique d'une transformation algébrique. Soit  $f$  un endomorphisme de l'espace projectif  $\mathbb{P}^k_{\mathbf{Q}}$ . En coordonnées homogènes  $[x_0 : \dots : x_k]$ ,  $f$  est défini par  $k + 1$  polynômes homogènes à coefficients rationnels  $P_i$  qui ont même degré  $d > 1$  et n'ont pas de zéro commun excepté l'origine  $(0, \dots, 0)$  :

$$f[x_0 : \dots : x_k] = [P_0(x_0, \dots, x_k) : \dots : P_k(x_0, \dots, x_k)].$$

Il se trouve alors que la différence des fonctions  $p \mapsto d h(p)$  et  $p \mapsto h \circ (f(p))$  est encadrée par deux constantes ne dépendant pas du point  $p \in \mathbb{P}^k(\mathbf{Q})$ . Le procédé de Tate produit donc à nouveau une hauteur  $\hat{h}$  sur  $\mathbb{P}^k(\mathbf{Q})$  satisfaisant  $\hat{h}(f(p)) = d \hat{h}(p)$  pour laquelle  $|\hat{h} - h|$  est bornée.

La hauteur canonique porte des informations dynamiques non triviales. Elle peut être étendue à l'ensemble des points de la variété à coordonnées dans la clôture algébrique  $\bar{\mathbf{Q}}$  de  $\mathbf{Q}$ . Ainsi étendue, elle peut donc être évaluée sur les points périodiques isolés de la transformation  $f$  étudiée, car ceux-ci sont définis par un système d'équations à coefficients rationnels. Il se trouve alors qu'un point  $p$  de la variété à coordonnées dans  $\bar{\mathbf{Q}}$  a une orbite finie si et seulement si sa hauteur canonique est nulle (voir [12]). Nous allons maintenant décrire des relations plus profondes entre dynamique et hauteur.

**Dynamique et entropie topologique.** – Que ce soit la multiplication par un entier  $m > 1$  sur une variété abélienne ou les endomorphismes de degré  $d > 1$  sur un espace projectif, ces deux familles de transformations développent une dynamique intéressante. Ceci avait bien sûr été observé depuis la fin du dix-neuvième siècle, puis largement étudié durant la première moitié du vingtième, notamment par Julia et Fatou (voir [2]).

Autour de 1964, donc à l'époque où Tate dégage la notion de hauteur canonique, apparaît une nouvelle façon de mesurer la complexité d'un système dynamique. Il

s'agit de la notion d'entropie topologique, à laquelle il sera régulièrement fait référence dans ce volume.

Ce concept, introduit par Adler, Konheim et McAndrew (voir [1]), peut être défini comme suit. Soit  $f : X \rightarrow X$  une transformation continue d'un espace métrique compact. Soient  $n$  un entier positif et  $\epsilon$  un réel strictement positif. On dit que deux points  $x$  et  $y$  de  $X$  ont la même orbite à la précision  $\epsilon$  sur la période  $n$  si la distance entre  $f^j(x)$  et  $f^j(y)$  est inférieure à  $\epsilon$  pour tout entier  $j$  entre 0 et  $n$ . Lorsque  $n$  tend vers l'infini, à  $\epsilon$  fixé, le nombre d'orbites que l'on peut ainsi distinguer croît au plus exponentiellement vite. L'entropie topologique  $h_{top}(f)$  mesure ce taux de croissance exponentiel, dans la limite où  $\epsilon$  tend vers 0 (voir le premier chapitre de [4]).

Pour une isométrie de  $X$ , l'entropie est nulle. Pour la multiplication par  $m$  sur une variété abélienne complexe de dimension  $k$  l'entropie topologique vaut  $2k \log(m)$  et pour un endomorphisme de  $\mathbb{P}^k(\mathbf{C})$  défini par des polynômes homogènes de degré  $d$  elle est égale à  $k \log(d)$  (voir [7]).

À elle seule, la positivité de l'entropie montre que la dynamique de ces transformations est riche. Pour la multiplication par  $m$  sur une variété abélienne complexe  $A(\mathbf{C})$ , ceci se traduit, entre autres, dans le fait que les points périodiques de  $f_m$  sont répulsifs et denses dans  $A(\mathbf{C})$  : un point est périodique si et seulement si c'est un point de torsion de  $A$ , et la dérivée de  $f^n$  en chaque point périodique de période  $n$  est une homothétie de rapport  $m^n > 1$ . Voyons ce qui reste de ces remarques simples pour certains endomorphismes de la droite projective.

**Mesure d'équilibre et équidistribution.** – Toujours en 1964, Brolin rédige un article concernant la dynamique des polynômes d'une variable complexe [3].

Soit  $P \in \mathbf{C}[z]$  un polynôme dont le degré  $d$  est strictement plus grand que 1. Le polynôme  $P$  détermine un endomorphisme

$$f[x_0 : x_1] = [P(x_0/x_1)x_1^d : x_1^d].$$

de  $\mathbb{P}^1(\mathbf{C}) = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$  qui fixe le point à l'infini  $\infty = [1 : 0]$ . Ce point fixe est attractif : si  $z$  est suffisamment proche de  $\infty$  la suite  $(f^n(z))$  converge vers  $\infty$ . Par définition, l'ensemble de Julia rempli de  $f$ , noté  $K(f)$ , est l'ensemble des points  $z$  de  $\mathbf{C}$  dont l'orbite  $\{z, f(z), f^2(z), \dots, f^n(z), \dots\}$  est bornée. Le complémentaire de  $K(f)$  est le bassin d'attraction de l'infini ; autrement dit,  $z$  est hors de  $K(f)$  si, et seulement si la suite  $(f^n(z))$  tend vers  $\infty$  avec  $n$ .

L'ensemble  $K(f)$  est un sous-ensemble compact de  $\mathbf{C}$ . La théorie du potentiel associe alors à  $K(f)$  sa « mesure d'équilibre »  $\mu_f$  : il s'agit de la mesure de probabilité supportée par le bord de  $K(f)$  qui, parmi les mesures de probabilité à support dans  $K(f)$ , minimise l'intégrale d'énergie

$$\int_{a \in K(f)} \int_{b \in K(f)} \log \frac{1}{|a - b|} d\mu(a) d\mu(b).$$

Brolin démontre que

1.  $f$  préserve la mesure  $\mu_f$  : si  $B$  est un borélien,  $\mu_f(B)$  est égal à  $\mu_f(f^{-1}(B))$  ;

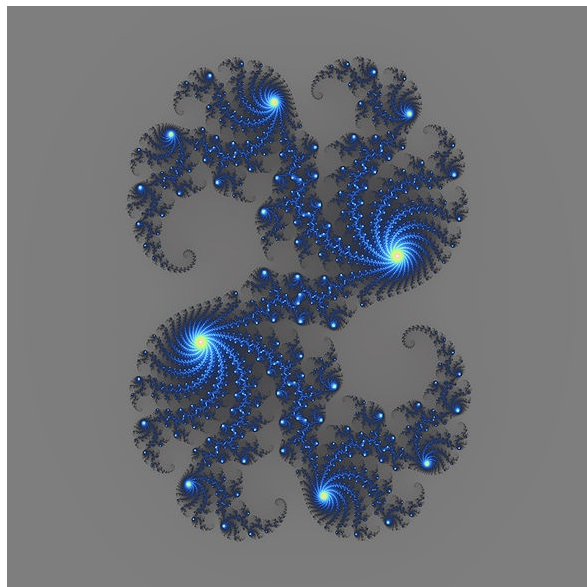


FIGURE 2. Un ensemble de Julia [15].

2. si  $z$  appartient à  $\mathbf{C}$  et  $f^{-1}\{z\}$  n'est pas réduit à  $\{z\}$ , la moyenne sur l'ensemble des préimages  $f^{-n}\{z\}$  converge vers  $\mu_f$  au sens de la convergence faible des mesures : on dit que les préimages de  $z$  se répartissent équitablement vers la mesure d'équilibre ;
3. la dynamique de  $f$  est mélangeante pour cette mesure : si  $B_1$  et  $B_2$  sont deux boréliens, la mesure de  $f^{-n}(B_1) \cap B_2$  tend vers le produit des mesures de  $B_1$  et de  $B_2$  lorsque  $n$  tend vers l'infini.

Lyubich montrera plus tard dans [10] que

4.  $\mu_f$  décrit la distribution des points périodiques répulsifs de  $f$ .

Plus précisément, posons

$$\mu_n = \frac{1}{d^n} \sum_{z \in P_n(f)} \delta_z$$

où  $\delta_z$  est la masse de Dirac au point  $z$ , et  $P_n(f)$  est l'ensemble des points périodiques de période divisant  $n$ , c'est-à-dire l'ensemble des solutions de l'équation  $f^n(z) = z$  (comptées avec multiplicité). Alors la suite de mesures  $\mu_n$  converge faiblement vers  $\mu_f$ , et cette propriété reste vraie si  $P_n(f)$  est remplacé par le sous-ensemble formé des points périodiques tels que  $|(f^n)'(z)| > 1$ . En particulier, les points périodiques répulsifs prédominent.

Lyubich montrera en outre que

5.  $\mu_f$  est l'unique mesure d'entropie maximale de  $f$ .

Sans décrire ce dernier énoncé, signalons simplement que l'ensemble de ces résultats montre que  $\mu_f$  est naturellement reliée aux propriétés dynamiques et stochastiques, de la transformation  $f : \mathbb{P}^1(\mathbf{C}) \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbf{C})$ .

**Fonction de Green et hauteurs canoniques.** – La fonction de Green  $\hat{g}$  du compact  $K(f)$  est l'unique fonction harmonique  $\hat{g} : \mathbf{C} \setminus K(f) \rightarrow \mathbf{R}^+$  qui est nulle sur le bord  $\partial K(f)$  et qui possède un pôle logarithmique à l'infini. Le laplacien de  $\hat{g}$  (pris au sens des distributions) coïncide avec la mesure d'équilibre  $\mu_f$ .

Cette fonction joue un rôle analogue à celui joué par la hauteur canonique  $\hat{h}$ . On trouve ainsi dans le texte de Brolin la même astuce que celle de Tate. Soit  $E$  un domaine simplement connexe du plan, à bord lisse, contenant  $K(f)$  et soit  $g$  la fonction de Green de  $E$ . On peut par exemple prendre pour  $E$  un disque de rayon  $R \gg 1$  et dans ce cas  $g(z) = \log^+(|z|/R)$ . La suite de fonctions

$$g_n(z) = \frac{1}{d^n} g(f^n(z))$$

converge alors vers la fonction de Green  $\hat{g}$  de  $K(f)$ ; celle-ci satisfait la relation d'invariance

$$\hat{g}(f(z)) = d\hat{g}(z).$$

L'analogie entre le processus itératif de Tate partant de la hauteur  $h$  et celui de Brolin partant de la fonction de Green  $g$  peut être expliquée et renforcée de la manière suivante. Tout nombre entier non nul  $a$  admet une factorisation en facteurs premiers essentiellement unique

$$a = \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{v_p(a)},$$

où  $\mathcal{P}$  est l'ensemble des nombres premiers. Le produit de la valeur absolue standard  $|a|$  avec les valeurs absolues  $p$ -adiques

$$|a|_p = p^{-v_p(a)}.$$

est alors égal à 1. Le lecteur verra dans l'article de Chambert-Loir que cette *formule du produit* permet de décomposer la hauteur canonique  $\hat{h}$  associée à  $f : \mathbb{P}^1(\mathbf{C}) \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbf{C})$  en une somme de hauteurs

$$\hat{h} = \sum_{p \in \mathcal{P} \cup \{\infty\}} \hat{h}_p,$$

où, premièrement, la hauteur  $\hat{h}_\infty$  s'identifie à la fonction de Green  $\hat{g}$  employée par Brolin et, deuxièmement, chaque hauteur  $\hat{h}_p$  est un analogue  $p$ -adique de  $\hat{g}$ .

La théorie des hauteurs canoniques contient donc, en germe, le potentiel de l'unique mesure d'entropie maximale  $\mu_f$ , et les hauteurs  $\hat{h}_p$  sont des analogues  $p$ -adiques de la fonction de Green.

**Des complexes aux  $p$ -adiques.** – Nous avons vu l’importance de la fonction de Green  $\hat{h}_\infty$  pour la dynamique d’une transformation polynomiale  $f : \mathbf{C} \rightarrow \mathbf{C}$ . Quel rôle jouent les autres hauteurs  $\hat{h}_p$  dans la dynamique de  $f$ ? Que dire de la dynamique  $p$ -adique de  $f$ ?

Pour tenter de répondre à ces questions, introduisons le corps  $\mathbf{Q}_p$  des nombres  $p$ -adiques. Celui-ci s’obtient en étendant la valeur absolue de  $\mathbf{Z}$  à  $\mathbf{Q}$  par  $|a/b| = |a|_p/|b|_p$  puis en complétant le corps  $\mathbf{Q}$  pour cette valeur absolue. La clôture algébrique de  $\mathbf{Q}_p$  n’est pas complète, mais sa complétion reste algébriquement close. On la note  $\mathbf{C}_p$ .

Le problème est alors d’étudier la dynamique des fractions rationnelles à coefficients dans  $\mathbf{Q}$  sur les droites projectives  $p$ -adique  $\mathbb{P}^1(\mathbf{Q}_p)$  et  $\mathbb{P}^1(\mathbf{C}_p)$ . La valeur absolue  $p$ -adique étant ultramétrique, c’est-à-dire que

$$|x + y|_p \leq \max(|x|_p, |y|_p),$$

et le corps  $\mathbf{C}_p$  n’étant pas localement compact, la géométrie de  $\mathbb{P}^1(\mathbf{C}_p)$  est très différente de celle de  $\mathbb{P}^1(\mathbf{C})$ .

Les premiers résultats de dynamique  $p$ -adique n’ont que quelques années. L’article [5] dans ce volume y est dédié. Le lecteur y verra comment les propriétés classiques de dynamique complexe (sur  $\mathbb{P}^1(\mathbf{C})$ ) s’y reflètent ou y sont mises en défaut.

Par exemple, lorsque  $f$  appartient à  $\mathbf{Q}[z]$ ,  $f$  induit un endomorphisme de  $\mathbb{P}^1(\mathbf{C}_p)$  pour chaque valeur de  $p$ , et les propriétés dynamiques de  $f$  sur  $\mathbb{P}^1(\mathbf{C}_p)$  dépendent fortement de  $p$  : pour tous les nombres premiers  $p$  sauf un nombre fini, la transformation  $f$  est 1-lipschitzienne, et son entropie topologique est donc nulle. De même, si  $q$  est un point périodique de  $f$  de période  $n$ , alors  $|(f^n)'(q)|_p = 1$  pour presque tout  $p$  ; plus généralement, la formule du produit montre que les points périodiques de  $f$  qui sont répulsifs pour  $f : \mathbb{P}^1(\mathbf{C}) \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbf{C})$  deviennent attractifs pour certains premiers  $p$ , éventuellement répulsifs pour d’autres, et indifférents pour tout  $p$  en dehors d’un ensemble fini.

À l’heure actuelle, trop peu de résultats de dynamique  $p$ -adique traitent des transformations définies sur des variétés algébriques de dimension supérieure. Le texte [5] concerne donc uniquement la dynamique des transformations d’une variable. Par contre, les travaux de Brolin et Lyubich évoqués plus haut, et leur pendant diophantien, ont été généralisés en dimension supérieure ou égale à 2.

**Dimension supérieure.** – Pour les transformations polynomiales des variétés projectives complexes de dimension quelconque, la théorie du pluripotential, ou, plus précisément, des courants positifs fermés, peut remplacer la théorie classique du potentiel sur les surfaces de Riemann. Ce principe a connu des applications spectaculaires dans la description des propriétés ergodiques des transformations holomorphes et méromorphes des variétés projectives complexes, étendant ainsi en dimension quelconque certains des résultats mentionnés ci-dessus.

Deux outils principaux se taillent la part du lion. Il s’agit dans les deux cas d’analyse harmonique, au sens large du terme.



Le premier est la théorie de Hodge. Dans la construction des hauteurs canoniques de Tate ou de la fonction de Green de Brolin, le procédé itératif employé nécessite de renormaliser la suite  $h \circ f^n$  (resp.  $g \circ f^n$ ) en divisant ces fonctions par un entier : on divise par  $m^{2n}$  dans le cas de la multiplication par  $m$  sur une courbe elliptique et par  $d^n$  dans le cas d'un endomorphisme de degré  $d$  de l'espace projectif. Dans les deux cas, ces entiers apparaissent naturellement comme valeur propre de  $f^*$  agissant sur la cohomologie de la variété. La première étape pour une transformation  $f$  d'une variété projective  $M$  de dimension  $k > 1$  est de décrire la transformation linéaire  $f^* : H^*(M, \mathbf{Z}) \rightarrow H^*(M, \mathbf{Z})$ . La théorie de Hodge fournit justement un outil permettant d'analyser l'anneau de cohomologie d'une variété projective complexe. Elle permet donc aussi d'exhiber les propriétés fondamentales des applications  $f^*$  étudiées ; ainsi, lorsque  $f$  est holomorphe, ce sont les valeurs propres de  $f^*$  sur les groupes de cohomologie de Dolbeault médians  $H^{s,s}(M, \mathbf{C})$  qui comptent.

Le second outil est la théorie du (pluri)potentiel, c'est-à-dire des courants positifs. Elle fournit des analogues multidimensionnels aux notions de fonction sous-harmonique, fonction de Green, mesure positive ... Grâce à elle, les vecteurs propres de  $f^*$  associés aux valeurs propres dominantes de  $f^* : H^{s,s}(M, \mathbf{R}) \rightarrow H^{s,s}(M, \mathbf{R})$  peuvent être représentés par des courants positifs généralisant la mesure de Brolin.

Le lecteur verra dans le texte de Guedj comment ces outils permettent in fine de construire, pour certaines transformations rationnelles  $f$ , une mesure de probabilité  $\mu_f$  dont les propriétés ergodiques sont analogues à celles de la mesure de Brolin lorsque  $f$  est un polynôme d'une variable.

Par exemple, lorsque  $f$  est un endomorphisme holomorphe de l'espace projectif dont le degré topologique est strictement plus grand que 1, les travaux de Fornæss et Sibony puis de Briend et Duval montrent que la mesure  $\mu_f$  ainsi construite décrit à la fois la répartition des points périodiques répulsifs de  $f$  et celle des images réciproques  $f^{-n}(z)$  d'un point  $z$  générique. Les théorèmes de Brolin et de Lyubich mentionnés ci-dessus sont donc encore valables pour tout endomorphisme holomorphe d'un espace projectif.

**Aspects diophantiens.** – Le texte de Chambert-Loir présente le pendant arithmétique de ce type de résultats, notamment pour ce qui concerne les problèmes d'équidistribution de préimages  $f^{-n}(z)$ , et leur analogue arithmétique nommé « équidistribution des points de petite hauteur ». Reprenons l'exemple d'un endomorphisme de  $\mathbb{P}^k$  défini sur  $\mathbf{Q}$  et de degré  $d$ . Soit  $z$  un élément de  $\mathbb{P}^k(\mathbf{Q})$ , ou plus généralement de  $\mathbb{P}^k(\bar{\mathbf{Q}})$ . La propriété d'invariance de la hauteur canonique  $\hat{h}$  montre que la hauteur de chaque point de l'ensemble  $f^{-n}(z)$  est égale à  $\hat{h}(z)/d^n$ . Puisque  $z$  et  $f$  sont définis sur  $\mathbf{Q}$ , l'ensemble  $f^{-n}(z)$  est invariant sous l'action du groupe de Galois  $\text{Gal}(\bar{\mathbf{Q}}; \mathbf{Q})$ . On obtient donc ainsi une suite d'ensembles finis Galois-invariants dont la hauteur tend vers 0. L'étude dynamique montre que la suite de mesures

$$\mu_n = \sum_{y \in f^{-n}(z)} \delta_y$$

converge faiblement vers la mesure  $\mu_f$ , ceci sans supposer que  $z$  soit à coordonnées rationnelles. Le problème de l'équidistribution des points de petite hauteur consiste à montrer que cette suite de mesures converge encore vers  $\mu_f$  lorsqu'on remplace les ensembles  $f^{-n}(z)$  par une suite quelconque d'ensembles finis  $E_n$  qui sont Galois-invariants et dont la hauteur canonique tend vers 0 (il faut supposer les  $E_n$  deux-à-deux distincts et d'union Zariski-dense). Des résultats de ce type seront décrits dans [6]. Dans ce cadre, la théorie des hauteurs et celle d'Arakelov offrent un langage adéquat permettant d'établir un dictionnaire entre géométrie diophantienne et dynamique. Prenons pour exemple la question suivante :

**Question de type Manin-Mumford.** – *Soit  $f$  un endomorphisme holomorphe du plan projectif  $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  dont le degré topologique est strictement plus grand que 1. Soit  $V \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{C})$  une courbe algébrique plane irréductible qui contient un ensemble infini, donc Zariski-dense, de points dont l'orbite par  $f$  est finie. L'orbite de la courbe  $V$  sous  $f$  est-elle nécessairement finie ?*

Cette question d'origine arithmétique est la généralisation naturelle d'un théorème de Raynaud concernant les points de torsion des variétés abéliennes, c'est-à-dire la torsion du groupe abélien  $A(\mathbb{Q})$  défini ci-dessus ; elle constitue néanmoins un problème dont l'énoncé relève entièrement des systèmes dynamiques. La réponse attendue n'est pas claire : la question analogue pour les endomorphismes des variétés abéliennes admet une réponse négative (voir l'exemple de Ghioca et Tucker présenté dans [6]).

**Existence d'endomorphismes.** – Jusqu'ici, les exemples principaux de transformations polynomiales de variétés projectives que nous avons évoqués sont la multiplication par un entier sur une courbe elliptique - et plus généralement sur une variété abélienne - et les endomorphismes holomorphes des espaces projectifs. En dimension 1, c'est-à-dire pour les surfaces de Riemann, ce sont les seuls exemples dynamiquement intéressants. À partir de la dimension 2, c'est-à-dire pour les surfaces projectives, de nouveaux exemples apparaissent. Weil mentionne très clairement l'importance qu'il attachait à ce type de transformations [17] :

*« De bonne heure j'avais été intrigué par l'exemple donné par Severi, au moyen d'une quartique dans  $\mathbb{P}^3$ , d'une surface possédant un groupe infini d'automorphismes lié au groupe des unités d'un corps quadratique réel ; un moment j'avais même espéré trouver là un moyen d'engendrer des extensions abéliennes de ce corps, donc une généralisation de la multiplication complexe ; c'était sans doute trop beau pour être vrai. »*

Ce passage est issu du commentaire que Weil donne à son texte de 1958 dans lequel figurent les célèbres conjectures d'Andreotti et Weil concernant les surfaces K3 ; toute surface quartique lisse, en particulier celle construite par Severi, est un exemple de surface K3. L'entropie topologique de l'automorphisme construit par Severi est strictement positive : la dynamique de cet automorphisme est donc riche, chaotique.

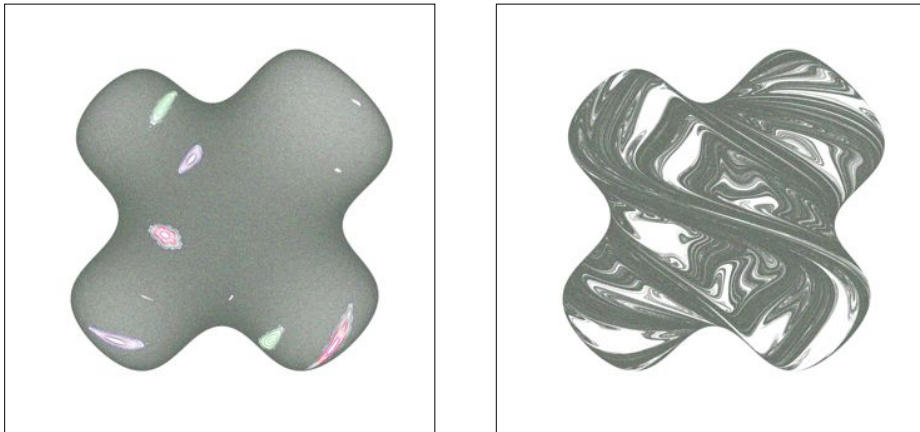


FIGURE 3. Dynamique sur une surface K3 réelle. À gauche quelques orbites, à droite une variété stable.

Les techniques présentées dans l'article de Guedj, chapitre IV, s'appliquent à cet automorphisme et décrivent en partie ses propriétés ergodiques.

Les conjectures d'Andreotti et Weil ont maintenant été démontrées et permettent, du moins en théorie, de déterminer les surfaces K3 qui possèdent une infinité d'automorphismes et celles qui ont un automorphisme avec une entropie strictement positive. Cependant, il semble illusoire d'espérer classer « toutes » les variétés projectives complexes qui admettent des transformations holomorphes ou rationnelles avec une dynamique intéressante. Ce type de problème fait l'objet de l'article [4]. Le lecteur y verra ainsi que les deux questions suivantes sont encore largement ouvertes : quelles sont les surfaces projectives complexes munies d'une infinité d'automorphismes ? Quelles sont celles qui possèdent une transformation rationnelle dominante d'ordre infini ?

**Rigidité.** – Certains endomorphismes ont une dynamique plus régulière que les autres. C'est le cas des exemples construits par Lattès en 1918. Reprenons pour cela l'exemple de la multiplication par  $m$  sur une courbe elliptique  $A(\mathbf{C})$ . Les points périodiques de  $f_m$  de période  $n$  se répartissent vers la mesure de Lebesgue sur  $A(\mathbf{C})$  lorsque  $n$  tend vers l'infini.

Soit  $\sigma : A \rightarrow A$  la multiplication par  $-1$ . Le quotient  $A(\mathbf{C})/\sigma$  est isomorphe à la sphère de Riemann  $\mathbb{P}^1(\mathbf{C})$  ; la projection  $\pi : A(\mathbf{C}) \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbf{C})$  ainsi obtenue a quatre points de ramification qui correspondent aux points d'ordre 2 du groupe abélien  $A(\mathbf{C})$ . La transformation  $f_m$  commute avec  $\sigma$ , passe au quotient et détermine donc un endomorphisme  $g_m$  de  $\mathbb{P}^1(\mathbf{C})$ . Par construction, la mesure  $\mu_{g_m}$  décrivant la répartition des points périodiques de  $g_m$  est donc lisse en dehors des quatre valeurs critiques de  $\pi$ .

Les exemples ainsi construits, par passage au quotient d'un endomorphisme d'une courbe elliptique, sont appelés « exemples de Lattès ». Une construction analogue

peut être conduite en partant de n'importe quelle variété abélienne. Ceci fournit de nombreux exemples de transformations holomorphes ou rationnelles sur des variétés projectives dont la dynamique est anormalement régulière. Le lecteur trouvera dans le premier texte de ce volume comment caractériser les transformations ainsi construites par la régularité de leur dynamique. Par exemple, Zdunick, Berteloot, Dupont et Loeb ont montré qu'un endomorphisme de l'espace projectif dont les points périodiques se répartissent vers une mesure absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue est un exemple de Lattès. En d'autres termes, les variétés abéliennes et leurs endomorphismes sont simultanément les plus simples du point de vue arithmétique et du point de vue dynamique.

**Regrets.** – Les textes qui suivent tentent de présenter quelques résultats qui illustrent ces interactions entre géométrie algébrique, géométrie diophantienne, systèmes dynamiques et analyse harmonique. Ils n'ont rien d'exhaustif et plusieurs aspects ont dû être mis de côté, à regret.

Le délai de rédaction aidant, ces lacunes initiales se sont agrandies au gré des publications parues depuis. Espérons que la vivacité du sujet s'en trouvera ainsi mise en valeur. Plus sérieusement, je remercie les auteurs, qui ont cherché à mettre à jour leurs références pendant que moi-même je tardais à rendre ma copie.

### Références

- [1] R. L. ADLER, A. G. KONHEIM & M. H. MCANDREW – « Topological entropy », *Trans. Amer. Math. Soc.* **114** (1965), p. 309–319.
- [2] D. S. ALEXANDER – *A history of complex dynamics*, Aspects of Mathematics, vol. 24, Friedr. Vieweg & Sohn, 1994.
- [3] H. BROLIN – « Invariant sets under iteration of rational functions », *Ark. Mat.* **6** (1965), p. 103–144.
- [4] S. CANTAT – « Quelques aspects des systèmes dynamiques polynomiaux. Existence, exemples, rigidité », ce volume.
- [5] S. CANTAT & A. CHAMBERT-LOIR – « Dynamique  $p$ -adique (d'après les exposés de Jean-Christophe Yoccoz) », ce volume.
- [6] A. CHAMBERT-LOIR – « Théorèmes d'équidistribution pour les systèmes dynamiques d'origine arithmétique », ce volume.
- [7] M. GROMOV – « On the entropy of holomorphic maps », *Enseign. Math.* **49** (2003), p. 217–235.
- [8] V. GUEDJ – « Propriétés ergodiques des applications rationnelles », ce volume.
- [9] S. LANG – « Les formes bilinéaires de Néron et Tate », in *Rédition du Séminaire Bourbaki*, vol. 1, Soc. Math. France, 1995, Séminaire Bourbaki, vol. 1962/64, exposé n° 274, p. 435–445.
- [10] M. J. LJUBICH – « Entropy properties of rational endomorphisms of the Riemann sphere », *Ergodic Theory Dynam. Systems* **3** (1983), p. 351–385.
- [11] H. MCKEAN & V. MOLL – *Elliptic curves*, Cambridge Univ. Press, 1997.

- [12] D. G. NORTHCOTT – « Periodic points on an algebraic variety », *Ann. of Math.* **51** (1950), p. 167–177.
- [13] H. POINCARÉ – « Sur les propriétés arithmétiques des courbes algébriques », *J. de math.*, 5<sup>e</sup> série **7** (1901), p. 161–233.
- [14] J. H. SILVERMAN & J. TATE – *Rational points on elliptic curves*, Undergraduate Texts in Mathematics, Springer, 1992.
- [15] USER :SOLKOLL – « The praying mantis galaxy » (2005), [http://commons.wikimedia.org/wiki/Julia\\_set](http://commons.wikimedia.org/wiki/Julia_set).
- [16] A. WEIL – « L'arithmétique sur les courbes algébriques », *Acta Math.* **52** (1928), p. 281–315.
- [17] ———, *Scientific works. Collected papers. Vol. II (1951–1964)*, Springer, 1979.

---

SERGE CANTAT, IRMAR, Campus de Beaulieu, 35042 Rennes Cedex

*E-mail* : [serge.cantat@univ-rennes1.fr](mailto:serge.cantat@univ-rennes1.fr)

*Url* : <http://perso.univ-rennes1.fr/serge.cantat/>

# QUELQUES ASPECTS DES SYSTÈMES DYNAMIQUES POLYNOMIAUX EXISTENCE, EXEMPLES, RIGIDITÉ

*par*

Serge Cantat

---

**Résumé.** – Nous décrivons les propriétés de base concernant la dynamique et la géométrie des transformations holomorphes et méromorphes des variétés complexes, compactes, kählériennes. En particulier, nous expliquons les contraintes qu'imposent la géométrie de la variété à l'existence de telles transformations. Nous donnons des exemples de telles transformations avec une dynamique intéressante, puis nous expliquons comment certaines contraintes naturelles sur la dynamique rigidifie celle-ci et permet de classer toutes les transformations réalisant ces contraintes.

**Abstract (Topics on polynomial dynamical systems: Existence, Examples, Rigidity.)**

We describe basic properties of the dynamics and geometry of holomorphic and meromorphic transformations of compact, kähler manifolds. In particular, we describe how the geometry of the manifold constrains the existence of transformations. Examples of holomorphic transformations with an interesting dynamics are described. Then, we explain how natural hypothesis on the dynamics rigidify it and enable us to list of transformations that realize these hypothesis.

## 1. Introduction

**1.1. Dynamique holomorphe.** – Donnons nous une variété projective complexe  $M$  et une transformation  $f$  de  $M$  qui est holomorphe ou rationnelle. En itérant cette transformation, nous obtenons un système dynamique « polynomial » à temps discret : seconde après seconde, un point  $z$  de l'ensemble  $M$  se déplace en  $z_1 = f(z)$ , puis en  $z_2 = f(z_1)$ , en  $z_3 = f(z_2)$  ... Un mouvement dynamique régi suivant la règle d'évolution édictée par  $f$  se développe ainsi sur la variété  $M$ .

Voici un exemple d'une telle transformation dû à Mazur et McMullen. Considérons l'ensemble  $X(\mathbf{R})$  constitué des solutions en nombres réels de l'équation

$$(1 + x^2)(1 + y^2)(1 + z^2) + 7xyz = 13/10.$$

---

**Classification mathématique par sujets (2010).** – 14E07, 14J50, 37F99, 32H50.

L'équation est de degré 2 par rapport à la variable  $x$ . À tout point  $(x, y, z)$  de  $X(\mathbf{R})$  correspond donc un second point  $(x', y, z)$  : ceci détermine une involution de  $X(\mathbf{R})$  qui s'exprime par des fractions rationnelles en  $(x, y, z)$ ,

$$(x', y, z) = \left( -x - \frac{7yz}{(1+y^2)(1+z^2)}, y, z \right).$$

Cette remarque vaut aussi pour la variable  $y$  ou la variable  $z$  et permet donc de construire trois involutions de  $X(\mathbf{R})$ . La transformation rationnelle obtenue en composant ces trois involutions est un difféomorphisme  $f$  de la surface  $X(\mathbf{R})$  : sur la figure 1, nous avons représenté les orbites  $\{z, f(z), \dots\}$  de six mille points de  $X(\mathbf{R})$  en itérant  $f$  trois mille fois pour chaque point. On distingue plusieurs types d'orbites : certaines restent confinées sur des courbes fermées tandis que d'autres paraissent remplir une partie importante de  $X(\mathbf{R})$ . Pour cet exemple, il semble probable qu'il existe un ensemble dense de points périodiques elliptiques, chacun étant entouré par des courbes fermées simples elles mêmes périodiques. La partie de droite de la figure 1 représente la variété instable de l'un des points périodiques hyperboliques de  $f$ .

Ce texte concerne l'étude de ce type de systèmes dynamiques ; il porte sur deux aspects :

- (a) l'existence de telles dynamiques polynomiales ;
- (b) la classification des systèmes dynamiques polynomiaux ou rationnels dont la dynamique est la plus régulière.

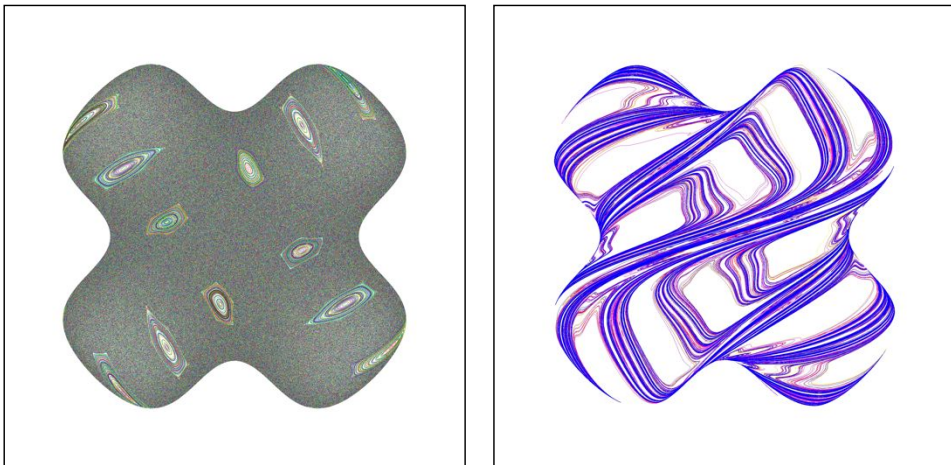


FIGURE 1. Dynamique sur une surface. La figure de gauche représente les orbites de quelques points pour un difféomorphisme polynomial d'une surface algébrique réelle. Celle de droite représente la variété instable de l'un des points périodiques hyperboliques de ce difféomorphisme. (image obtenue à l'aide d'un programme développé par C. McMullen et V. Pit)