

BULLETIN DE LA S. M. F.

THIERRY BARBOT

Variétés affines radiales de dimension 3

Bulletin de la S. M. F., tome 128, n° 3 (2000), p. 347-389

http://www.numdam.org/item?id=BSMF_2000__128_3_347_0

© Bulletin de la S. M. F., 2000, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Bulletin de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Bulletin/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/legal.php>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

VARIÉTÉS AFFINES RADIALES DE DIMENSION 3

PAR THIERRY BARBOT (*)

RÉSUMÉ. — Nous classifions les variétés affines radiales de dimension 3 vérifiant l'une des conditions suivantes : (i) leur groupe d'holonomie est virtuellement résoluble, (ii) leur flot radial est tangent à une surface plate, (iii) leur flot radial admet au moins une orbite périodique qui n'est pas de type hyperbolique, (iv) l'image de leur application développante est un ouvert convexe. S. Choi a utilisé les résultats du présent article sous sa version prépubliée, achevant la classification des variétés affines radiales de dimension 3.

ABSTRACT. — RADIANT AFFINE 3-MANIFOLDS. — We classify all the radiant affine 3-manifolds with virtually solvable holonomy. We classify the radiant affine 3-manifolds admitting a flat embedding of a surface tangent to the radial flow too. Eventually, we show that if the radiant affine manifold is not one of Benzécri's examples, and if its holonomy group is not virtually solvable, then the periodic orbits of the radial flow are of saddle type. As a corollary, we obtain the classification of the convex radiant affine 3-manifolds. S. Choi, using our results exposed in the preprint [2], obtains the complete classification of closed radiant affine 3-manifolds, answering a conjecture by Y. Carrière.

1. Introduction

Cet article est consacré à l'étude des structures affines radiales sur les variétés de dimension 3 (une structure affine est dite radiale si son groupe d'holonomie fixe un point de l'espace affine). La terminologie « radiale » provient de l'existence d'un flot non singulier particulier : le flot radial. Ce flot préserve la structure affine et est transversalement projectif.

Y. Carrière [6] a énoncé une conjecture générale à propos de ces variétés affines, qui mène à leur complète classification. S. Choi, exploitant les résultats obtenus dans le présent article dans sa version prépubliée [2], est parvenu à valider la véracité de cette conjecture dans le brillant travail [10].

(*) Texte reçu le 19 avril 1999, révisé le 7 janvier 2000.

T. BARBOT, U.M.P.A., U.M.R. 5669, École Normale Supérieure de Lyon, 46, allée d'Italie 69007 Lyon. Email : barbot@umpa.ens-lyon.fr et <http://umpa.ens-lyon.fr/~barbot/>
Ce travail est partiellement soutenu par le CNPq-Brésil.

Mots clés : variété affine radiale.

Classification mathématique par matières : 57M50, 53A20, 53C15.

Un exemple particulièrement simple de variété affine radiale fermée est obtenu en quotientant $\mathbb{R}^3$ privé de l'origine par une application linéaire contractante (*i.e.* dont le spectre est strictement contenu dans le disque unité). La variété ainsi obtenue est homéomorphe au produit de la sphère et du cercle. Ces variétés affines, ainsi que leur quotient par des groupes (finis) d'automorphismes affines agissant librement et proprement sont appelés *variétés de Hopf affines*. Un autre type d'exemple est obtenu en suspendant des automorphismes du tore ou d'une bouteille de Klein préservant une structure affine sur ces surfaces (rappelons que le tore et la bouteille de Klein sont les seules surfaces compactes admettant des structures affines, [3], [11]).

Ces exemples font partie d'une famille plus générale. Depuis J.-P. Benzécri, on sait comment construire de nombreux exemples de structures affines radiales sur les fibrés de Seifert à classe d'Euler nulle à partir de structures projectives sur l'orbifold sous-jacente (il convient de relever aussi qu'il y a abondance de telles structures projectives, *cf.* [14]). Nous appelons ces structures affines radiales *exemples de Benzécri*, ou encore, *structures affines radiales induites par une structure projective*. Nous rappelons leur construction à la section 3.1. Elles se caractérisent par la propriété suivante (proposition 3.3) :

PROPOSITION. — *Ce sont les seules variétés affines radiales fermées de dimension 3 pour lesquelles toutes les orbites du flot radial sont périodiques.*

Nous rappellerons comment généraliser cette construction pour obtenir, à partir d'automorphismes projectifs d'orbifolds munies de structures projectives réelles, d'autres exemples, que nous appelons *suspensions affines généralisées* (voir [6]). Ils regroupent tous ceux discutés précédemment, et sont caractérisés de la manière suivante (proposition 3.4) :

PROPOSITION. — *Une variété affine radiale fermée de dimension 3 est affinement isomorphe à une suspension affine généralisée si et seulement si son flot radial admet une section totale.*

Rappelons qu'une section totale d'un flot est une surface compacte plongée dans la variété ambiante, transverse au flot et rencontrant toutes les orbites du flot. Cette proposition n'est pas originale puisque déjà établie dans [6] (avec moins de détails). Une telle section du flot radial hérite naturellement d'une structure projective réelle qui est préservée par l'application de premier retour. La conjecture de Y. Carrière, démontrée par S. Choi, énonce précisément que le flot radial d'une variété affine radiale de dimension 3 admet toujours une section totale, et donc qu'une telle variété est toujours une suspension affine généralisée. La preuve de S. Choi utilise les résultats suivants, établis dans le présent article :

THÉORÈME A. — *Les seules variétés de dimension 3 affines radiales fermées dont le groupe d'holonomie est virtuellement résoluble sont les suspensions*

affines généralisées induites par une structure projective réelle sur une orbifold de caractéristique d'Euler positive ou nulle.

(Un groupe est virtuellement résoluble s'il contient un sous-groupe résoluble d'indice fini). Je remercie S. Dupont pour avoir relevé une erreur dans la première version de la preuve de ce théorème.

Pour montrer le théorème A, nous emploierons la méthode suivante : étant résoluble (à indice fini près, ce qui n'a pas d'incidence sur le théorème), le groupe d'holonomie préserve soit un plan, soit une droite de $\mathbb{R}^3$. Le cas où il n'y a pas de plan invariant reçoit un traitement à part (voir fin du chapitre 5). Dans le cas où il y a un plan invariant, on distingue deux cas, selon que ce plan évite ou non l'image de l'application développante. S'il l'évite, on obtient aisément, grâce à un critère classique dû à Tischler que le flot radial admet une section totale, et donc que M est une suspension affine généralisée. Sinon, l'image réciproque par l'application développante du plan invariant se projette dans la variété affine en une union finie de surfaces plongées dans M , affinement plates, et tangentes au flot radial. Le théorème A est donc un corollaire du théorème suivant :

THÉORÈME B. — *Soit M une variété de dimension 3 fermée munie d'une structure affine radiale. Si M contient une surface plongée plate et tangente au flot radial, alors M est une suspension affine généralisée.*

La preuve du théorème B peut se résumer de la manière très succincte suivante : soit T une surface plate tangente au flot radial. Étant affine, T est un tore ou une bouteille de Klein. Supposons ici que ce soit un tore. On montre que si M n'est pas une variété de Hopf ni un exemple de Benzécri, alors T est incompressible (cf. lemme 5.1). Son groupe fondamental est un sous-groupe H du groupe fondamental de M isomorphe à $\mathbb{Z}^2$. L'étape essentielle consiste à montrer que l'action de H sur le revêtement universel s'étend en une action de $\mathbb{R}^2$. Grâce à cette action, on découpe le revêtement universel en des domaines qui revêtent chacun un morceau affine élémentaire, homéomorphe au produit du tore par l'intervalle. On recompose la variété affine radiale en recollant ces morceaux affines. On vérifie que les variétés obtenues sont des suspensions affines généralisées.

Un résultat intermédiaire important de cette preuve est le suivant :

THÉORÈME C. — *Soit M une variété de dimension 3 fermée munie d'une structure affine radiale. Si le flot radial de M admet des orbites périodiques qui ne sont pas de type selle, alors M est une suspension affine généralisée.*

De ce travail, nous obtenons comme corollaire la classification des variétés affines radiales de dimension 3 *convexes*, i.e. celles pour lesquelles l'image de l'application développante est un ouvert convexe de $\mathbb{R}^3$. Une orbifold projective

réelle est dite *convexe* si l'image de son application développante est contenue dans un plan affine du plan projectif (*i.e.* le complémentaire d'une droite projective dans $\mathbb{R}P^2$), et qu'elle est convexe dans ce plan affine (*cf.* [8], [14]). Une surface affine est dite *homogène* si le groupe de ses automorphismes affines agit transitivement sur elle-même.

THÉORÈME D. — *Les variétés fermées de dimension 3 munies d'une structure affine radiale convexe sont les exemples de Benzécri induits par une structure projective convexe sur une orbifold de caractéristique d'Euler négative ou nulle.*

Ce théorème se montre de la manière suivante : si l'image de l'application développante est un convexe contenant une droite affine complète, on montre aisément l'existence d'un plan préservé par un sous-groupe d'indice fini du groupe d'holonomie. Le théorème B permet alors de conclure. Dans l'autre cas, celui où l'image de l'application développante ne contient pas de droite affine complète, on dispose sur cette image d'une métrique riemannienne préservée par tous les automorphismes affines : celle construite dans [23]. Cette métrique donne alors lieu à une métrique sur la variété affine radiale pour laquelle le flot radial est isométrique. On peut alors utiliser la classification des flots isométriques en dimension 3. La preuve que nous donnons dans cet article n'invoque pas une telle classification. Elle utilise tous les résultats de cet article. Nous observons que l'adhérence d'une orbite est toujours (finiment revêtue par) un tore, de dimension 1, 2 ou 3. Si un de ces tores est unidimensionnel, on applique le théorème C. Si un de ces tores est de dimension 2, on applique le théorème B. Sinon, la variété M toute entière est elle-même finiment revêtue par le tore tridimensionnel. On applique alors le théorème A.

REMERCIEMENTS. — Ce travail a été effectué lors d'un séjour à l'Université Fédérale Fluminense (Niteroi, Brésil), puis remanié à l'École Normale Supérieure de Lyon. Je remercie chaleureusement toute l'équipe du département de pós-graduação de l'U.F.F. pour les efforts qu'ils ont déployés pour rendre possible mon séjour dans cet institut. Je remercie également l'Institut de Mathématiques Pures et Appliquées pour son inestimable aide technique, mathématique et autre. Je remercie aussi vivement S. Choi pour m'avoir soumis comme problème la preuve du théorème D. Enfin, un grand merci au rapporteur qui m'a indiqué quel est le bon énoncé et la preuve du lemme de fermeture des assiettes, et qui a optimisé la preuve de la proposition 2.4.

2. Préliminaires

Soit M une variété fermée munie d'une (G, X) -structure, où G est un groupe de Lie agissant analytiquement sur une variété analytique X : il s'agit de la