COURS SPÉCIALISÉS 3

FONCTIONS SYMÉTRIQUES, POLYNÔMES DE SCHUBERT ET LIEUX DE DÉGÉNÉRESCENCE

Laurent Manivel

Société Mathématique de France 1998

Laurent Manivel

Institut Fourier, Université Grenoble I, BP 74, 38402 Saint Martin d'Hères Cedex, France.

E-mail : `Laurent.Manivel@ujf-grenoble.fr`

Url : `http://www-fourier.ujf-grenoble.fr/~manivel`

***Classification mathématique par sujets* (2000).** — 05E05, 05E10, 14M15, 14N10, 20C30, 57T15.

Mots clefs. — Classe de Chern, grassmannienne, groupe symétrique, homologie singulière, ordre de Bruhat, partition, permutation, polynôme de Schubert, polynôme de Schur, représentation, tableau, variété de drapeaux, variété de Schubert.

FONCTIONS SYMÉTRIQUES, POLYNÔMES DE SCHUBERT ET LIEUX DE DÉGÉNÉRESCENCE

Laurent Manivel

Résumé. — Ce cours comprend deux chapitres de nature combinatoire. Le premier est consacré aux fonctions symétriques, et aux propriétés des polynômes de Schur. Nous les étudions à l'aide, en particulier, de manipulations sur les tableaux, définies à l'aide du procédé d'insertion de Knuth. Nous montrons également que ces polynômes représentent les caractères des représentations irréductibles des groupes symétriques.

Le second chapitre est une étude des polynômes de Schubert, définis par A. Lascoux et M.-P. Schützenberger en termes de différences divisées. Ces polynômes sont associés aux permutations, et leur combinatoire est très liée à l'ordre de Bruhat sur les groupes symétriques, ainsi qu'à certaines algèbres de Hecke de ces groupes.

Le troisième et dernier chapitre est au contraire d'essence géométrique, puisqu'il a pour thème l'étude des variétés de Schubert dans les grassmanniennes et les variétés de drapeaux. Le fait que les classes d'homologie de ces variétés soient représentées par des polynômes de Schur, ou de Schubert, permet de traduire géométriquement bon nombre des résultats des deux premiers chapitres. Enfin, les variétés de Schubert étant des modèles universels de certains lieux de dégénérescence de morphismes entre fibrés vectoriels, nous en déduisons des expressions des classes d'homologie de ces lieux en termes de classes caractéristiques des fibrés impliqués.

***Abstract* (Symmetric functions, Schubert polynomials and degeneracy loci)**

This course begins with two chapters of combinatorial nature. The first one is devoted to symmetric functions, and to the properties of Schur polynomials, which we study with the help of Young tableaux and the Knuth insertion algorithm. We show that these polynomials can be identified with the characters of the irreducible representations of symmetric groups.

The second chapter is a study of Schubert polynomials, which were defined by A. Lascoux and M.-P. Schützenberger in terms of divided differences. These polynomials are associated with permutations. Their combinatorics is related to the Bruhat order on symmetric groups, and to certain Hecke algebras of these groups.

The third and last chapter is, on the contrary, of geometrical nature, its main theme being the study of Schubert varieties inside grassmannians and flag manifolds. The fact that the homology classes of these varieties can be represented by Schur or Schubert polynomials, allows one to translate in geometrical language most of the results of the first two chapters. And since these Schubert varieties are universal models for certain degeneracy loci of morphisms between vector bundles, we deduce expressions for the homology classes of these loci in terms of characteristic classes of the bundles involved.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION

CE DONT IL SERA QUESTION DANS CE COURS. — Ce texte est issu d'un cours de troisième cycle donné à l'Institut Fourier (Université Joseph Fourier, Grenoble 1), durant l'année universitaire 1995-96. Il se veut d'une part une introduction à la combinatoire des fonctions symétriques, plus précisément des polynômes de Schur, ainsi qu'à celle des polynômes de Schubert. Nous y étudierons d'autre part la géométrie des grassmanniennes, des variétés de drapeaux, et surtout de leurs variétés de Schubert. Les liens profonds qui unissent, par delà nos artificielles classifications, ces deux sujets de peu de rapport *a priori*, ont curieusement tardé à se laisser apercevoir.

Les polynômes de Schur, d'un côté, furent explicités par Jacobi dès 1841 [**43**]. Mais leur importance provient avant tout du rôle que leur fait jouer la théorie des représentations des groupes. C'est en effet à leur éponyme, Isaiah Schur, élève de Frobenius, que l'on doit d'avoir reconnu dans ces fonctions, dans un mémoire célèbre de 1901, les caractères irréductibles des groupes linéaires complexes $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ [**82**]. Plus encore, les polynômes de Schur décrivent aussi les représentations des groupes de permutations, étudiées par A. Young à l'aide des tableaux auxquels il a laissé son nom [**98**].

Les variétés de Schubert, d'un autre côté, sont des sous-variétés des grassmanniennes, ces dernières paramétrant les sous-espaces linéaires de dimension donnée d'un espace vectoriel, en l'occurence complexe. Elles furent introduites, au siècle dernier, pour les besoins de la géométrie énumérative [**81**]. Combien de droites de l'espace projectif coupent-elles une famille donnée de sous-espaces linéaires ? Combien de droites contient une hypersurface de degré donné de ce même espace projectif ? Combien de coniques du plan sont-elles tangentes à cinq droites données ? Les variétés de Schubert font partie des outils forgés par les géomètres allemands et italiens pour répondre à de telles questions. On peut en effet les traduire en termes d'intersection de certaines variétés paramétrant les objets considérés. En particulier, il arrive que le problème se ramène à celui de compter le nombre de points d'une intersection de variétés de Schubert.

Or, formellement, calculer des produits de polynômes de Schur, ou des intersections de variétés de Schubert (en homologie tout au moins, ou dans l'anneau de Chow), c'est la même chose ! Mais si la réponse générale au premier de ces problèmes fut donnée par Littlewood et Richardson (sans démonstration tout à fait rigoureuse, d'ailleurs) dès 1934 [**64**], ce n'est qu'en 1947 que Lesieur explicita l'analogie [**62**]. Le nœud, ainsi rendu visible, n'a cessé depuis de se resserrer, entre la combinatoire des partitions et des permutations d'une part, la géométrie des grassmanniennes et des variétés de drapeaux d'autre part. C'est tout le sujet de ce cours, dont voici plus précisément le contenu.

CE QUE CONTIENT CE COURS...— Je l'ai divisé en trois chapitres. Le premier est consacré aux fonctions symétriques, plus particulièrement aux polynômes de Schur : ce sont des polynômes à coefficients entiers positifs, dont chacun des monômes est en correspondance avec un tableau de Young ayant la propriété d'être « semistandard ».

Les propriétés combinatoires de ces tableaux ont été explorées successivement par Robinson ([**77**], 1938), Schensted ([**80**], 1961), Knuth ([**48**], 1970), puis Schützenberger et son école [**83, 84, 96**]. Elles sont encore aujourd'hui, et plus que jamais, l'objet d'un grand intérêt. Via l'introduction du monoïde plaxique, ce sont elles qui nous permettront, après bien d'autres propriétés des fonctions symétriques, de démontrer la règle célèbre de Littlewood & Richardson, qui gouverne la multiplication des polynômes de Schur.

J'ai adopté cette approche pour au moins deux raisons. D'abord, parce qu'elle offre un point de vue différent de celui du traité, déjà classique, de Macdonald [**66**]. Ensuite, parce qu'il me donnait l'occasion de rendre plus accessible une théorie trop peu connue, me semble-t-il, et dont l'importance n'a pourtant cessé de croître depuis quelques années.

J'expliquerai ensuite comment les polynômes de Schur permettent de décrire les caractères irréductibles des groupes symétriques $\mathcal{S}_n$. J'établirai entre fonctions symétriques et représentations des groupes de permutations, le dictionnaire suivant :

Représentations de $\mathcal{S}_n$	*Fonctions symétriques*
Représentations irréductibles (1.6.6)	Partitions de poids n (1.1.1)
Degrés (1.6.8)	Nombres de tableaux standard (1.4.12)
Règle de Young (1.6.14)	Formule de Pieri (1.2.5)
Induction (1.6.2)	Règle de Littlewood & Richardson (1.5.23)
Produit tensoriel	??????????

Cette dernière ligne pour signaler que le problème, pourtant fondamental, de la décomposition d'un produit tensoriel de représentations irréductibles d'un groupe symétrique, décomposition dont on sait peu de choses, reste l'un des points obscurs de la théorie.

Le dictionnaire précédent ayant été établi, nous nous intéresserons aux *polynômes de Kostka-Foulkes*. Ce sont des « q-généralisations » des classiques nombres de Kostka (1882), dont l'intérêt provient du fait qu'ils apparaissent simultanément dans la théorie des caractères des groupes linéaires sur les corps finis $\mathrm{GL}(n, \mathbb{F}_q)$ (Green 1955), dans la description de la cohomologie des orbites nilpotentes de $\mathrm{GL}(n, \mathbb{C})$ (Kraft 1981, DeConcini & Procesi 1981, Garsia & Procesi 1992), comme polynômes de Kazhdan-Lusztig (Lusztig 1983), ou comme décrivant la statistique de la charge sur les tableaux de Young (Lascoux & Schützenberger 1978 [**56**]). C'est sous ce dernier aspect que nous les étudierons, pour en établir certaines des plus remarquables propriétés.

Le second chapitre sera consacré aux polynômes de Schubert. Ces polynômes ont été découverts, ou inventés, en 1982 par A. Lascoux et M.-P. Schützenberger [**58**], qui en ont largement exploré les propriétés combinatoires. Nous verrons par exemple qu'ils entretiennent des liens subtils avec les problèmes d'énumération des décompositions réduites des permutations, ou bien avec la règle de Littlewood & Richardson, dont ils permettent d'obtenir une version particulièrement efficace.

On doit également à Macdonald un agréable compte-rendu d'une part non négligeable de cette théorie, d'ores et déjà considéré comme référence [**67**]. J'ai cependant pris de manière répétée le parti de m'en écarter. En particulier, j'ai préféré reprendre l'élégante approche des polynômes de Schubert qu'ont proposée Fomin et Kirillov, en rapport avec l'équation de Yang-Baxter et les algèbres de Hecke des groupes symétriques [**14**]. J'ai également choisi de tirer parti de la méthode des chemins de Gessel et Viennot, méthode combinatoire qui depuis son apparition vers 1986 [**28, 29**], n'a cessé de démontrer sa pertinence.

Signalons que les polynômes de Schubert sont loin d'avoir révélé tous leurs secrets. On ne sait à peu près rien, par exemple, de leur multiplication, et de la règle de type Littlewood & Richardson qui devrait la gouverner.

Si les deux premiers tiers de ce cours sont de nature essentiellement combinatoire, son troisième et dernier chapitre est d'essence géométrique. Il sera en effet consacré aux variétés de Schubert, sous-variétés des grassmanniennes, ou des variétés de drapeaux, définies par certaines conditions d'incidence avec des sous-espaces fixés. Ces variétés ont d'abord été introduites pour les besoins de la géométrie énumérative.

Dès les premiers pas de la topologie algébrique, des efforts importants ont été accomplis pour rendre rigoureux les travaux de Schubert et des géomètres énumératifs [**94**]. Il s'agissait en effet de résoudre le 15^e problème de Hilbert, qui s'énonce comme suit [**38**] :

> *Détermination rigoureuse des nombres de la géométrie énumérative, et cela en fixant de manière plus précise les limites de leur validité, et, en particulier, des nombres que Schubert a trouvés en s'appuyant sur le principe de son calcul énumératif, dit de la* position spéciale *ou de la* conservation du nombre.

Ce programme n'est encore qu'imparfaitement accompli [**47**]. L'anneau de cohomologie des grassmanniennes fut cependant l'un des tous premiers à être correctement compris [**94**], et manifeste une étonnante analogie formelle avec l'anneau des fonctions symétriques. Un de mes premiers objectifs a été de mettre en place le dictionnaire qui permet de transcrire les problèmes d'intersection des variétés de Schubert, en termes de fonctions symétriques. Ce dictionnaire s'établit comme suit :

Grassmanniennes	*Fonctions symétriques*
Variétés de Schubert (3.2.1)	Partitions (1.1.1)
Incidence (3.2.3)	Inclusion des partitions (1.1.1)
Classes fondamentales (3.2.9)	Polynômes de Schur (1.2.1)
Degrés (3.2.2)	Nombres de Kostka (1.2.3)
Formule de Pieri (3.2.8)	Formule de Pieri (1.2.2)
Formule de Giambelli (3.2.10)	Formule de Jacobi-Trudi (1.2.4)
Intersection (3.2.11)	Règle de Littlewood & Richardson (1.5.23)
Postulation (3.3.5)	Partitions planes (1.4.4)

L'anneau de cohomologie des variétés de drapeaux, par ailleurs, a donné lieu à nombre de travaux importants. Citons ceux d'Ehresmann ([**13**], 1934), de Borel ([**4**], 1953) le décrivant comme un quotient d'un anneau de polynômes, de Chevalley ([**9**], circa 1958), plus tard ceux de Bernstein, Gelfand & Gelfand ([**2**], 1973) et Demazure ([**10**], 1974). Ces derniers auteurs utilisent de façon essentielle les différences divisées de Newton, sur lesquelles repose la définition même des polynômes de Schubert.

Ces polynômes apparaissent ainsi comme des représentants, dans la présentation de Borel, des duaux de Poincaré des classes fondamentales des variétés de Schubert : représentants aux propriétés si remarquables, il faut le signaler, que la définition de leurs analogues pour des groupes de Lie complexes simples autres que $\mathrm{SL}(n, \mathbb{C})$, continue de poser des problèmes difficiles. Dans le cas des variétés de drapeaux complets, nous mettrons en place une partie du dictionnaire suivant :

Variétés de drapeaux	*Polynômes*
Variétés de Schubert (3.6.2)	Permutations (2.1.1)
Incidence (3.6.5)	Ordre de Bruhat (2.1.2)
Classes fondamentales (3.6.13)	Polynômes de Schubert (2.3.4)
Formule de Monk (3.6.12)	Formule de Monk (2.7.1)
Degrés	Nombres de chaînes de permutations
Postulation	Monômes standard
Intersection	???????????

Les grassmanniennes se réalisent comme variétés projectives grâce aux plongements de Plücker. Après avoir montré comment s'obtiennent les équations des variétés de Schubert, nous nous intéresserons à leurs lieux singuliers, que nous décrirons explicitement. Dans le cas des variétés de drapeaux, nous établirons un critère simple de lissité. Et nous construirons des désingularisations des variétés de Schubert.

Nous expliciterons ensuite le lien qui existe entre les variétés de Schubert, et les classes caractéristiques qu'associe Chern à un fibré vectoriel complexe sur une variété différentiable. On peut interpréter ces classes comme représentant par exemple les sous-variétés définies par l'annulation d'une section convenable du fibré considéré. Plus généralement, les classes d'homologie des lieux de dégénérescence de morphismes entres fibrés vectoriels, c'est-à-dire de lieux définis par certaines conditions de rang, peuvent s'exprimer en termes de classes caractéristiques. L'exemple le plus célèbre en est sans doute la formule de Thom & Porteous, qui date de 1971 [**72**].

En 1992, W. Fulton a obtenu une vaste généralisation de cette formule et des cousines qu'ont lui connaissait jusqu'alors (Kempf & Laksov 1974, Pragacz 1988), en démontrant que les lieux de dégénérescence de morphismes entres fibrés vectoriels munis de drapeaux de sous-fibrés, peuvent être décrits au moyen de certains polynômes de Schubert [**21**] : les variétés de Schubert jouent en l'occurence le rôle de lieux de dégénérescence universels. En particulier, pour une classe très particulière de permutations, appelées vexillaires par Lascoux et Schützenberger, on obtient des formules déterminantales dont certains exemples remontent à Giambelli. Ce cours se conclut sur la démonstration de ce résultat, dont on appréciera, je l'espère, tant la remarquable généralité de son énoncé, que la simplicité de sa démonstration.

On doit d'ailleurs à Fulton un ouvrage récent sur les tableaux de Young et leur utilisation en géométrie, ouvrage dont ce cours a tiré une partie de sa substance [**22**]. Le lecteur intéressé y trouvera des détails sur la combinatoire des tableaux, sujet sur lequel nous avons préféré