PANORAMAS ET SYNTHÈSES 7

ESPACES DE MODULES DES COURBES, GROUPES MODULAIRES ET THÉORIE DES CHAMPS

Xavier Buff, Jérôme Fehrenbach,
Pierre Lochak, Leila Schneps,
Pierre Vogel

Société Mathématique de France 1999

Nous dédions chaleureusement ce livre à la mémoire de Claude Itzykson

ESPACES DE MODULES DES COURBES, GROUPES MODULAIRES ET THÉORIE DES CHAMPS

Xavier Buff, Jérôme Fehrenbach, Pierre Lochak, Leila Schneps, Pierre Vogel

Ce texte est le produit d'une rencontre des *États de la Recherche*, qui consistait en trois cours de trois heures chacun. Le premier chapitre, correspondant au premier cours, est une introduction aux espaces de Teichmüller, plus concise que les textes introductifs courants, mais contenant la démonstration de plusieurs résultats utiles et parfois difficiles à trouver dans la littérature. Ce chapitre contient également une introduction aux espaces de modules des courbes, avec une attention particulière portée au cas de genre zéro, et une description complète de la partie à l'infini. Le deuxième chapitre reprend les espaces de modules des courbes en genre zéro et donne une description complète de leur groupoïde fondamental basé en les points base tangentiels à l'infini ; cette description repose sur une identification de structure avec certains sous-groupoïdes canoniques d'une catégorie tensorielle tressée libre. Ce chapitre se termine par une étude de l'action galoisienne sur le groupoïde fondamental, calculée via la théorie de Grothendieck-Teichmüller. Enfin le chapitre 3 introduit les catégories enrubannées strictes, apparentées aux catégories tensorielles tressées, et les utilise pour construire des invariants de 3-variétés qui conduisent à leur tour à une construction de théories quantiques des champs.

Moduli spaces of curves, mapping class groups and field theory. — The present text is the proceedings of a three-day workshop, consisting of three three-hour courses. Chapter 1, corresponding to the first course, gives an introduction to Teichmüller space which is more concise than the popular textbooks, yet contains full proofs of many useful results which are often difficult to find in the literature. This chapter also contains an introduction to moduli spaces of curves, with a detailed description of the genus zero case, and in particular of the part at infinity. Chapter 2 takes up the subject of the genus zero moduli spaces and gives a complete description of their fundamental groupoids, based at tangential base points neighboring the part at infinity; the description relies on an identification of the structure of these groupoids with that of certain canonical subgroupoids of a free braided tensor category. It concludes with a study of the canonical Galois action on the fundamental groupoids, computed using Grothendieck-Teichmüller theory. Finally, chapter 3 studies strict ribbon categories, which are closely related to braided tensor categories : here they are used to construct invariants of 3-manifolds which in turn give rise to quantum field theories.

Classification math. : 32G15, 20F34, 57A10, 11R32, 20F36, 81Exx.

Mots-clés : Teichmüller space, moduli spaces of curves, fundamental groupoid, 3-manifolds, invariants, quantum field theory

Xavier Buff,
Département de Mathématiques, Université Paul Sabatier,
118, route de Narbonne, 31062 Toulouse Cedex.
buff@picard.ups-tlse.fr

Jérôme Fehrenbach,
Institut Non Linéaire de Nice-Sophia Antipolis,
UMR CNRS-UNSA 6618,
1361, route des Lucioles, 06560 Valbonne.
fehrenbach@inln.cnrs.fr

Pierre Lochak
DMI ENS,
45, rue d'Ulm, 75230 Paris Cedex 05.
lochak@dmi.ens.fr

Leila Schneps
Laboratoire de Mathématiques, Faculté des Sciences,
16, route de Gray
25030 Besançon Cedex

pierre Vogel,
Département de Mathématiques,
Université de Paris VII,
2, Place Jussieu, 75251 Paris Cedex 05.
vogel@math.jussieu.fr

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE III. INVARIANTS DE WITTEN-RESHETIKHIN-TURAEV ET THÉORIES QUANTIQUES DES CHAMPS

AVANT-PROPOS

À l'origine, la session *État de la Recherche* de Besançon devait être une introduction aux utilisations de l'espaces de modules des surfaces de Riemann en physique théorique et en théorie des nombres. En 1994, Claude Itzykson m'a parlé avec enthousiasme de la théorie des dessins d'enfants de Grothendieck et de ses généralisations à la théorie des espaces de modules. C'est à partir de ces discussions que nous avons, Claude, Pierre Lochak et moi-même, élaboré le projet que nous reproduisons ici intégralement. Nous indiquons en note la correspondance avec les chapitres du présent volume.

> ⟪Depuis quelques années, de profonds liens ont été découverts entre des domaines jusque-là indépendants ; l'arithmétique des corps de nombres et des courbes algébriques définies sur $\overline{\mathbb{Q}}$, la géométrie des espaces de modules $M_{g,n}$ des surfaces de Riemann munies de points marqués, la théorie des nœuds, et les théories conformes étudiées en physique théorique. Ces domaines sont reliés par quelques fils conducteurs communs à tous, tels par exemple les "dessins d'enfants" ou "fatgraphs", ou le rôle joué par les espaces de modules. Le but du colloque sera de couvrir les progrès accomplis dans ces domaines, en soulignant les interconnexions et la façon dont le travail fait dans un domaine a pu s'interpréter dans un autre.
>
> Résumons brièvement les questions qui seront traitées. En arithmétique, à partir du théorème de Belyi identifiant les courbes algébriques définies sur $\overline{\mathbb{Q}}$ comme revêtements de $\mathbb{P}^1\mathbb{C}$ non-ramifiés en dehors de 0, 1 et ∞, Grothendieck a suggéré une nouvelle façon d'explorer le groupe de Galois absolu $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ en exploitant la géométrie des espaces de modules $M_{g,n}$. Il considère un groupoïde fondamental pour chaque $M_{g,n}$, basé en une collection de points astucieusement choisis, et suggère de munir la collection des complétés profinis de ces groupoïdes de flèches naturelles de dégénérescence provenant de la dégénérescence des courbes elles-mêmes. D'après la suite exacte standard d'homotopie étale, on sait que $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ agit sur ces groupoïdes, et que de plus cette action respecte toutes ces flèches, ce qui fournit des propriétés nouvelles et très explicites des éléments de $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$: on ne sait pas encore si cette description, entièrement indépendante de la théorie des corps de nombres, caractérise complètement le groupe de Galois absolu[1].
>
> Depuis plusieurs années, des résultats très importants sur les espaces de modules ont été démontrés. Ces espaces sont munis d'une structure d'orbifold, sont irréductibles, de dimension finie ; ils possèdent des compactifications stables, qui sont projectives. Ces résultats sont utiles pour l'étude des théories conformes en physique théorique : ces théories sont conformément invariantes par construction, ce qui implique que certaines techniques d'intégrales de chemins peuvent être descendues à l'espace des structures conformes non-équivalentes, *i.e.* les espaces de modules (l'équivariance par rapport au groupe modulaire permet de descendre de l'espace de

[1] L'étude des groupoïdes fondamentaux de l'espace de modules, munis de l'action naturelle du groupe de Galois, forment l'essentiel du contenu du chapitre II.

Teichmüller à l'espace de modules). Ces résultats ont suscité le besoin d'une bonne théorie de l'intégration sur les espaces de modules, permettant d'effectuer des calculs concrets. Tout d'abord il faut paramétrer l'espace d'une manière commode ; ceci a été fait de plusieurs façons[2], en se servant de différentes décomposition de l'espace de modules en cellules, reflétant des décompositions parallèles des surfaces de Riemann ; ces décompositions utilisent des théories apparentées, telles que les dessins d'enfants et la chirurgie de Thurston. L'avantage de ces méthodes récentes est qu'elles permettent d'effectuer des calculs beaucoup plus explicites qu'avant ; de plus ces décompositions en cellules sont reliées de près à la construction du groupoïde de Teichmüller.

Les constructions précédentes trouvent leur place dans un paysage encore plus vaste, qui ouvre en particulier sur les derniers développements en théorie des invariants de nœuds[3] et des variétés de dimension trois. Réciproquement, certaines définitions et théorèmes dans ce domaine s'appliquent de façon étonnante à la théorie des espaces de modules décrite plus haut, donnant ainsi des résultats nouveaux sur $\mathrm{Gal}(\overline{\mathbb{Q}}/\mathbb{Q})$ qui seront abordés à la fin de la session. »

Remerciements.

C'est avec un certain découragement que je me suis efforcée de continuer seule l'organisation et la préparation de cette session *État de la Recherche* après la disparition de Claude, et j'avais bien du mal à essayer d'imaginer comment Claude aurait choisi de faire les choses. Je suis profondément reconnaissante à Michel Bauer de m'être venu en aide pendant cette période difficile ; les liens avec la physique n'ont été présents pendant le colloque que grâce à lui. Ma reconnaissance chaleureuse va également à Pierre Lochak qui m'a aidée en tout, du plus banal envoi d'enveloppes jusqu'aux mathématiques en passant par le soutien moral, à Xavier Buff et Jerôme Fehrenbach qui ont accepté de faire du premier chapitre et du premier cours un projet à trois, et à Pierre Vogel qui s'est chargé d'un travail pour lequel on n'aurait pu trouver plus compétent. Le texte qu'on va lire a été relu de façon profonde et détaillé par un rapporteur qui, tout en gardant un anonymat prudent, nous a fait bénéficier de ses connaissances manifestement fort étendues dans le domaine (et souvent aussi de sa solide maîtrise de la langue française). Mes remerciements vont également à Laura Fainsilber qui m'a aidée pour toute la partie de l'organisation qui concernait Besançon, sans compter son temps. Quant aux participants à la session, ils ont bien voulu accepter des conditions rendues un tantinet surréalistes, d'abord par la nécessité d'un changement subit de dates lorsqu'est apparue une incompatibilité avec celles du séminaire Bourbaki, et ensuite par une grève totale de la SNCF qui a commencé le jour même du début du colloque. Mes remerciements à tous ceux qui ont malgré tout su trouver le chemin de Besançon et contribué à y créer une atmosphère chaleureuse.

Leila Schneps
Paris, le 28 novembre 1997.

[2] Les différentes façons de définir des coordonnées sur l'espace de Teichmüller et l'espace de modules, et les décompositions de ces espaces en cellules, forment le sujet du chapitre I, où l'on donne également une description détaillée de la partie à l'infini des espaces de modules en genre zéro.

[3] Le chapitre III développe la théorie des invariants de nœuds et de variétés de dimension 3.

Chapitre I

ÉLÉMENTS DE GÉOMÉTRIE DES ESPACES DE MODULES DES COURBES

par Xavier Buff, Jerôme Fehrenbach, Pierre Lochak

0. Introduction

Dans ce chapitre, nous esquissons une approche élémentaire de l'espace de modules des courbes lisses (avec éventuellement des points marqués) qui permet d'en obtenir des descriptions «concrètes». Dans l'expression *espace de modules des courbes lisses, avec points marqués*,

• les mots *courbes lisses* désignent des courbes complexes ou des surfaces de Riemann ;

• les *points marqués* sur une courbe S sont des points (distincts et ordonnés) $x_1, \ldots, x_n$ de S ; on peut aussi considérer que les points «marqués» ont été retirés de S ;

• les mots *espaces de modules* désignent l'ensemble des classes d'isomorphisme de telles données $(S, x_1, \ldots, x_n)$.

Cette approche est élémentaire dans la mesure où il n'y entre aucune géométrie algébrique, et que nous travaillons donc uniquement sur le corps des complexes, en considérant les courbes algébriques comme des surfaces de Riemann. Par description concrète, on entend en particulier la donnée de coordonnées qui permettent des calculs effectifs ; nous décrirons essentiellement l'un de ces systèmes de coordonnées (coordonnées dites de Fenchel-Nielsen) et mentionnerons d'autres possibilités avec les références appropriées. On vise également une compréhension de la topologie de l'espace de modules, qui passe par une cellulation de celui-ci, c'est-à-dire une découpe en ces objets topologiquement triviaux que sont les cellules ; ceci constitue un point de départ pour l'étude de la cohomologie de l'espace de modules ainsi qu'une théorie de l'intersection, et nous donnerons des références qui devraient être abordables après la lecture du présent texte. Ces coordonnées permettent également de donner une description géométrique des « bouts à l'infini » de l'espace de modules et de comprendre — pour le cas des courbes complexes — la compactification de Deligne-Mumford par l'adjonction de courbes à singularités bien contrôlées (courbes stables) ; nous décrirons le début de la théorie, ce qui devrait là encore permettre au lecteur d'aborder facilement la littérature plus spécialisée. Enfin, dans le cas des courbes de genre 0 (sphères avec des points marqués), qui ont beaucoup attiré l'attention ces dernières années, nous donnons une description combinatoire de l'« infini » des espaces de modules, qui se relie avec les thèmes abordés au chapitre II de ce livre.

Dans la suite de cette introduction, nous rappelons les principaux résultats relativement élémentaires que nous admettrons, et qui concernent essentiellement la topologie des surfaces et la géométrie hyperbolique plane. Ils sont classiques et se trouvent en de nombreux endroits ; en particulier [H] ou [IT] contiennent tout ce qui est nécessaire, et bien au delà. On commence par la donnée d'une surface topologique orientée S de genre g, avec n (où $n \geq 0$) points marqués, que l'on pourra considérer ici comme enlevés. Cette surface de référence « standard » S munie des points marqués est unique à homéomorphisme non canonique près et les définitions des espaces de modules et de Teichmüller dépendent en principe du choix de S, deux choix distincts conduisant à des espaces isomorphes mais non canoniquement isomorphes. Par un abus de langage courant et innocent sauf dans de rares cas, on indexera les objets non pas par S mais simplement par le couple (g, n), en gardant à l'esprit ce qui précède (voir § I.1). Si $P = \{p_1, \ldots, p_n\}$ désigne l'ensemble des points marqués, le groupe fondamental $\pi_1(S - P; p_0)$ de $S - P$ par rapport à un point base quelconque p_0 est le groupe engendré par des lacets $a_1, \ldots, a_g, b_1, \ldots, b_g, c_1, \ldots c_n$, avec la seule relation :

$$[a_1, b_1] \cdots [a_g, b_g] c_1 \cdots c_n = 1,$$

où on note $[x, y] = xyx^{-1}y^{-1}$. Ici les a_i et b_j forment une base « symplectique » de l'homotopie de S basée en p_0 ; autrement dit les indices d'intersection algébrique, déterminés par l'orientation de la surface, sont donnés par

$$a_i \cdot a_j = 0 \quad (i \neq j), \quad b_i \cdot b_j = 0 \quad (i \neq j), \quad a_i \cdot b_j = \delta_{ij}.$$

Les c_j sont des lacets basés en p_0 qui font une fois le tour des p_j dans le sens positif et sont disjoints entre eux et également des a_i, b_j. On notera que si $n \geq 1$, le groupe $\pi_1(S - P; p_0)$ est libre à $2g + n - 1$ générateurs, ce qui est important pour certaines constructions.

On peut faire de S une surface de Riemann en la munissant d'une structure complexe, c'est-à-dire une structure conforme, ou encore un moyen de mesurer les angles des vecteurs tangents en chaque point (on suppose S munie d'abord d'une structure différentiable). L'espace de modules $\mathcal{M}_{g,n}$ paramétrise en gros (voir plus loin) les structures conformes sur S – munie de n points marqués – à difféomorphisme près, et l'espace de Teichmüller $\mathcal{T}_{g,n}$ ces mêmes structures à difféomorphisme isotope à l'identité près. On admettra ici deux résultats fondamentaux de topologie des surfaces : tout d'abord, S étant munie d'une structure différentiable, il est équivalent de travailler en topologie C^0 ou en topologie C^1. Autrement dit, on démontre qu'*un difféomorphisme homotope à l'identité est également isotope à l'identité*. D'autre part, on a le théorème fondamental (dû à Nielsen) de classification des difféomorphismes de surfaces (théorème évidemment tout à fait propre à la dimension 2) : soit S une surface compacte orientable ; on note $\pi_1(S;p_0)$ le groupe fondamental de S basé en p_0, $\mathrm{Diff}(S)$ le groupe des difféomorphismes de S (préservant l'orientation), et $\mathrm{Diff}_0(S)$ la composante connexe de l'identité, c'est-à-dire le groupe des difféomorphismes librement isotopes à l'identité (« librement » indique que l'isotopie ne préserve pas nécessairement le point base). Alors on a l'isomorphisme :

$$\mathrm{Diff}(S)/\mathrm{Diff}_0(S) \simeq \mathrm{Aut}\big(\pi_1(S;p_0)\big)/\mathrm{Inn}\big(\pi_1(S;p_0)\big),$$

où $\mathrm{Inn}(\pi_1(S;p_0))$ est le sous-groupe des automorphismes intérieurs de $\mathrm{Aut}(\pi_1(S;p_0))$. Autrement dit, avec une écriture plus compacte :

$$\pi_0\big(\mathrm{Diff}(S)\big) \simeq \mathrm{Out}\big(\pi_1(S)\big).$$

Pour ces théorèmes, en particulier le second, qui s'étend aux surfaces avec points marqués (ou, comme on l'a dit, enlevés), on pourra consulter [H, chap. 1] qui contient des références et un schéma de preuve.

Introduisons ensuite les surfaces de Riemann (structures complexes) et les structures hyperboliques (nous renvoyons en particulier à [B] et [Bo]). Soit donc X une surface de Riemann modelée sur S de genre g avec n points marqués, ce qui équivaut à la donnée d'une structure complexe sur S, donc d'une surface de Riemann compacte $\widehat{X}$ et de n points distingués $x_1, \ldots, x_n$. On pose

$$X = \widehat{X} - \{x_1, \ldots, x_n\}$$

et on suppose qu'on est dans le cas hyperbolique, c'est-à-dire que la caractéristique d'Euler-Poincaré de X, soit

$$\chi(X) = \chi(S - P) = 2 - 2g - n,$$

est strictement négative. Alors (théorème d'uniformisation), le revêtement universel de X est isomorphe au demi-plan de Poincaré

$$\mathbb{H} = \big\{z \in \mathbb{C},\ \mathrm{Im}(z) > 0\big\},$$

de sorte qu'on a $X \simeq \mathbb{H}/\Gamma$, où Γ est un sous-groupe discret de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$, le groupe des automorphismes de $\mathbb{H}$ pour la structure conforme standard. Le groupe Γ est bien sûr, comme groupe abstrait, isomorphe à $\pi_1(S-P;p_0)$, et a donc la présentation décrite plus haut. Plus précisément, Γ est un groupe Fuchsien de première espèce sans élément elliptique ; il est de première espèce parce que $X = \widehat{X} - \{x_1, \ldots, x_n\}$ est sans bord, et sans élément elliptique parce que les points marqués sont enlevés. Autrement dit, Γ ne contient que des éléments hyperboliques et paraboliques (si $n \geq 1$) ;

on pourra consulter [MH] pour des théorèmes de comparaison sur les espaces de Teichmüller et de modules pour des courbes avec points « marqués » — donnant lieu à des transformations elliptiques — et des points « enlevés » — correspondant à des transformations paraboliques.

Le théorème d'uniformisation permet également de définir sur X, par passage au quotient à partir du revêtement universel $\mathbb{H}$, une unique métrique complète à courbure constante -1 qu'on appelle métrique de Poincaré de X. On regarde alors les éléments de $\Gamma \subset \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$ comme des isométries de $\mathbb{H}$ pour la structure hyperbolique usuelle de $\mathbb{H}$. D'après la formule de Gauss-Bonnet, l'aire $A(X)$ de X muni de la métrique de Poincaré est donnée par

$$A(X) = -2\pi\chi(X) = 2\pi(2g-2+n),$$

et ne dépend donc que de g et n, ce qui sera très important dans la suite. Il existe plusieurs modèles en principe équivalents de géométrie hyperbolique plane (à courbure constante), dont chacun a son utilité propre, parce qu'en particulier les différents types d'isométries y sont plus ou moins commodément représentés. Nous utiliserons bien sûr le modèle du demi-plan $\mathbb{H}$ (adapté aux transformations hyperboliques) et du disque D (adapté aux transformations elliptiques) reliés entre eux par une transformation homographique, mais aussi celui de l'hyperboloïde dont on rappellera certaines propriétés en temps voulu, et nous citerons brièvement celui, moins usité, de la bande, relié au demi-plan par une transformation logarithmique.

Rappelons encore ici pour terminer deux propriétés élémentaires et utiles. On considère de nouveau une surface hyperbolique sans bord X munie de sa métrique de Poincaré : alors *il existe dans chaque classe d'homotopie libre de courbes une et une seule géodésique pour cette métrique*. Il s'agit en fait là d'une propriété générale des variétés complètes à courbures sectionnelles strictement négatives, dont il est facile de voir que le revêtement universel est contractile. De plus, si on se donne deux classes d'isotopie de courbes et que l'on peut trouver deux représentants de ces classes qui sont disjoints, les géodésiques correspondantes, qui existent et sont uniques d'après ce qui précède, sont alors disjointes.

Un mot sur les références bibliographiques, très nombreuses dans ce domaine. Nous en mentionnerons quelques unes dans le texte, mais nous recommandons dès à présent au lecteur l'ouvrage d'introduction [IT], à la fois pour son contenu et comme une mine bibliographique jusque 1990 (114 références à des ouvrages, 266 références à des articles). D'autre part, le livre [DFG] permet de se faire une idée des avancées récentes sur les espaces de modules de courbes, et constitue en même temps une bonne source bibliographique.

C'est avec grand plaisir que les trois auteurs remercient Adrien Douady pour leur avoir transmis, en particulier au fil d'un groupe de travail organisé à l'ENS, un peu de sa science (pour ne pas dire sa sagesse) des surfaces de Riemann, espaces de modules, *etc.* Enfin nous remercions chaleureusement le rapporteur pour sa relecture très soigneuse du texte, ses nombreuses remarques, et pour nous avoir signalé la formule élémentaire pour les quantités b_n, qui apparaît au § 2.5.

1. Espaces de Teichmüller et espaces de modules

Dans ce premier paragraphe, nous introduisons d'abord plusieurs définitions des objets principaux, à savoir les espaces de Teichmüller et de modules (§§1 à 3). Ces différentes définitions correspondent à différents points de vue et nous montrons dans les grandes lignes pourquoi elles décrivent effectivement les mêmes objets, vus sous des angles différents. Nous donnerons le moment venu des références plus spécifiques, mais on peut déjà renvoyer aux ouvrages de base [A], [B], [H], [IT] et [T] pour tout ce qui concerne ces définitions et leurs équivalences. Les titres de certains de ces livres indiquent d'ailleurs par eux-mêmes le point de vue adopté par leurs auteurs.

Nous introduisons ensuite, au § 1.4, une des manières classiques de mettre des coordonnées sur l'espace de Teichmüller, et par là-même sur l'espace de modules ; ce sont les coordonnées dites de Fenchel-Nielsen, qui fournissent une bonne description globale de la structure *réelle* de ces espaces.

Enfin, dans le dernier paragraphe (§ 1.5), nous illustrons l'emploi de ces coordonnées en démontrant une des propositions clefs quand il s'agit d'étudier l'espace de modules « à l'infini » et de le compactifier. Bien que ce résultat figure depuis longtemps dans le « folklore » du domaine et soit couramment utilisé (comme expliqué brièvement ici-même au § 2.1), il est difficile d'en trouver une démonstration détaillée et effective (c'est-à-dire avec une évaluation explicite des constantes mises en jeu), et c'est ce que nous faisons ici.

1.1. L'espace de Teichmüller $\mathcal{T}_{g,n}$

Comme expliqué dans l'introduction, les espaces de Teichmüller et les espaces de modules sont définis à partir d'une surface topologique (qu'on suppose munie d'une structure différentiable) de référence S compacte orientée de genre g et d'un ensemble

$$P = \{x_1, \ldots, x_n\} \subset S$$

de points marqués de S. La paire (S, P) définit une surface de type (g, n). Changer (S, P) en (S', P'), également de type (g, n), induit dans la plupart des constructions un isomorphisme (non canonique) et l'on peut souvent se contenter de préciser le type (g, n) des surfaces considérées. La caractéristique d'Euler de la surface ouverte $S - P$ est donnée par

$$\chi(S - P) = 2 - 2g - n,$$

et la surface est hyperbolique si et seulement si $\chi < 0$; nous nous bornerons dans ce qui suit à ce cas.

L'espace de Teichmüller $\mathcal{T}(S, P) \simeq \mathcal{T}_{g,n}$, est *grosso modo* l'ensemble des surfaces de Riemann munies d'un *marquage*, à isomorphisme respectant le marquage près. Il y a — au moins — trois approches possibles pour définir le marquage : par les propriétés conformes ou métriques, ou par l'uniformisation, c'est-à-dire en utilisant les groupes Fuchsiens. On en tire trois définitions de $\mathcal{T}_{g,n}$ qui ont chacune leur charme propre, et nous esquisserons les preuves des équivalences, en renvoyant à la littérature pour des précisions.

Approche analytique

Étant donnée une surface S (compacte orientée) de référence et un ensemble $P \subset S$ de points marqués, un moyen de « marquer » une surface de Riemann est de se donner un difféomorphisme Φ de S dans celle-ci. Considérons maintenant deux surfaces de Riemann $\widehat{X}$ et $\widehat{X'}$ compactes avec des ensembles de points marqués P_X et $P_{X'}$. On les suppose munies de marquages Φ et Φ', savoir deux difféomorphismes

$$\Phi : S \longrightarrow \widehat{X} \quad \text{et} \quad \Phi' : S \longrightarrow \widehat{X'}$$

tels que $\Phi(P) = P_X$ et $\Phi'(P) = P_{X'}$. On dira qu'un isomorphisme analytique (*i.e.* conforme) α *respecte le marquage* si on a un diagramme commutatif :

$$\begin{array}{ccc} (S,P) & \xrightarrow{\Phi} & (\widehat{X}, P_X) \\ {\scriptstyle h}\Big\downarrow & & \Big\downarrow{\scriptstyle \alpha} \\ (S,P) & \xrightarrow{\Phi'} & (\widehat{X'}, P_{X'}) \end{array}$$

où h est un difféomorphisme de S qui fixe P et qui est *isotope à l'identité* dans $S - P$.

***Définition 1.1.* —** L'*espace de Teichmüller* $\mathcal{T}(S, P)$ est l'ensemble des classes d'équivalence de surfaces de Riemann munies d'un marquage, modulo les isomorphismes qui respectent les marquages.

Nous reviendrons ci-dessous (en particulier au § 1.4) sur la ou les définitions de la topologie sur cet espace. On peut noter aussi que la définition ci-dessus vaut encore pour les surfaces non hyperboliques.

Approche métrique

Nous avons vu dans l'introduction que chaque surface de Riemann X homéomorphe à $S - P$ peut être munie de sa métrique de Poincaré. Un difféomorphisme $\Phi : S \to \widehat{X}$ permet de remonter cette métrique sur $S - P$. On munit ainsi $S - P$ d'une métrique hyperbolique, c'est-à-dire complète, d'aire finie, et de courbure -1. Il est donc naturel de définir l'ensemble $\mathcal{H}$ des métriques hyperboliques sur $S - P$ et de voir les surfaces de Riemann munies d'un marquage comme les éléments $m \in \mathcal{H}$. On peut ensuite traduire la notion d'isomorphisme respectant le marquage : le groupe $\mathrm{Diff}_0(S - P)$ (difféomorphismes isotopes à l'identité) agit à droite sur $\mathcal{H}$ par la formule :

$$h \in \mathrm{Diff}_0(S - P) \longmapsto h^* m \in \mathcal{H}.$$

Nous dirons que deux métriques m et m' dans $\mathcal{H}$ sont *équivalentes* s'il existe h dans $\mathrm{Diff}_0(S - P))$ qui envoie m sur m', c'est-à-dire tel que $h^*(m') = m$. On définit alors naturellement l'espace de Teichmüller suivant la

***Définition 1.2.* —** L'espace de Teichmüller $\mathcal{T}(S, P)$ est l'espace quotient

$$\mathcal{H} / \mathrm{Diff}_0(S - P).$$

L'équivalence entre cette définition et la précédente est une conséquence du théorème d'uniformisation (*cf.* par ex. [IT], th. 1.8). Comme rappelé dans l'introduction, ce théorème dit que toute surface de Riemann hyperbolique X est isomorphe à $\mathbb{H}/\Gamma$, où $\mathbb{H}$ est le demi-plan de Poincaré, et où Γ est un sous-groupe discret (Fuchsien, de première espèce et sans élément elliptique) de $\mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$. On peut alors aussi réinterpréter la notion de marquage en termes de représentations du groupe fondamental, un marquage étant essentiellement la donnée d'une « base » du groupe fondamental de la surface, soit encore très concrètement la donnée de lacets (à isotopie près) telle que la surface découpée suivant ceux-ci soit simplement connexe (voir figure 1.1 ci-dessous). Précisons ceci brièvement :

Représentations du groupe fondamental

D'après le théorème de Nielsen rappelé dans l'introduction, on peut identifier

$$\mathrm{Diff}(S-P)/\mathrm{Diff}_0(S-P) \quad \text{à} \quad \mathrm{Aut}\big(\pi_1(S-P;p_0)\big)/\mathrm{Inn}\big(\pi_1(S-P;p_0)\big).$$

Cette identification permet de voir un marquage comme la donnée d'un isomorphisme entre $\pi_1(S-P;p_0)$ et un groupe Fuchsien Γ, qui sera dit *orienté* si les difféomorphismes correspondants de $S-P$ préservent l'orientation. Le groupe fondamental $\pi_1(S-P;p_0)$ par rapport à un point base quelconque p_0 (*cf.* figure 1.1), est engendré par, $a_1,\ldots,a_g,b_1,\ldots,b_g,c_1,\ldots,c_n$, avec une relation :

$$\prod_{1\le i\le g} a_i b_i a_i^{-1} b_i^{-1} \prod_{1\le j\le n} c_j = 1$$

(on peut noter que si $n \ge 1$, ce groupe est libre à $2g+n-1$ générateurs).

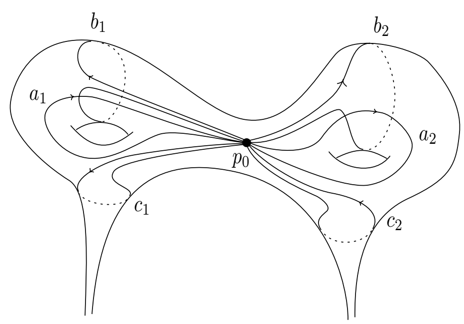

Figure 1.1

Par conséquent, se donner un isomorphisme entre $\pi_1(S-P;p_0)$ et un groupe $\Gamma \subset \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$, c'est se donner une famille génératrice $A_1,\ldots,A_g,B_1,\ldots,B_g,C_1,\ldots,C_n$ de Γ, les A_i et B_i étant d'ailleurs hyperboliques, et les C_j paraboliques. Par ailleurs, deux surfaces de Riemann X et X' sont isomorphes si les groupes Γ et Γ' correspondants sont conjugués par un élément $\alpha \in \mathrm{PSL}(2,\mathbb{R})$: $\Gamma' = \alpha\Gamma\alpha^{-1}$.