Astérisque

S. BENACHOUR
B. ROYNETTE
P. VALLOIS

Solutions fondamentales de $u_t - \frac{1}{2}u_{xx} = \pm|u_x|$

Astérisque, tome 236 (1996), p. 41-71
<http://www.numdam.org/item?id=AST_1996__236__41_0>

© Société mathématique de France, 1996, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Astérisque » (http://smf4.emath.fr/Publications/Asterisque/) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Solutions fondamentales de $u_t - \frac{1}{2} u_{xx} = \pm|u_x|$

S. Benachour, B. Roynette, P. Vallois

Résumé. — A l'aide de techniques probabilistes nous construisons explicitement la solution fondamentale du problème de Cauchy associé à l'équation $u_t - \frac{1}{2}u_{xx} = \pm|u_x|$, lorsque la dimension d'espace d est égale à 1. Puis nous analysons le comportement en norme L^p des solutions de cette équation pour une large classe de données initiales. Le cas où $d \geq 2$ a été étudié aussi et fera l'objet d'une autre publication.

I. Introduction

1. Considérons l'équation aux dérivées partielles :

$$u_t - \frac{1}{2}\Delta u = -|\nabla u| \text{ dans }]0, +\infty[\times I\!R^d \tag{1.1}$$

$$u(0,.) = \mu \text{ dans } I\!R^d. \tag{1.2}$$

Ces équations ont un lien avec celles de Navier-Stokes. En effet, lorsque la dimension d'espace est deux, les équations de Navier-Stokes décrivent l'évolution de la vitesse $u = (u_1, u_2)$ d'un fluide de viscosité $\nu > 0$ et incompressible, cf. [L], et s'écrivent :

$$\text{(N.S.)} \quad \begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} - \nu\Delta u + (u.\nabla)u = -\nabla p \\ \operatorname{div} u = 0 \end{cases}$$

où p (la pression) est une fonction scalaire, inconnue aussi. Dans ces équations, le tourbillon $\omega = \operatorname{rot} u$ (identifié dans ce cas à une fonction scalaire) joue un rôle essentiel et vérifie l'équation

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} - \nu\Delta\omega = -(u.\nabla)\omega. \tag{T}$$

En supposant u bornée par une constante $C > 0$, on a :

$$|\frac{\partial \omega}{\partial t} - \nu \Delta \omega| \leq C|\nabla \omega|.$$

D'où l'intérêt accordé à l'équation (1.1).

2. L'existence et l'unicité de la solution de (1.1), (1.2) dans

$$L^1([0,T], W^{1,1}(\mathbb{R}^d)) \cap C^0([0,T], \mathcal{M}_b(\mathbb{R}^d))$$

ont été obtenues par M. Ben Artzi [B] lorsque la donnée initiale est une fonction régulière et par S. Benachour, H. Brézis et M. Pierre [BBP] quand la donnée initiale μ est dans l'espace $\mathcal{M}_b(\mathbb{R}^d)$ des mesures de masse totale finie.

En intégrant l'équation (1.1) dans $\mathbb{R}^d$, on a :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\mathbb{R}^d} u(t,x)dx = -\int_{\mathbb{R}^d} |\nabla u(t,x)|dx$$

et donc : $t \to \int_{\mathbb{R}^d} u(t,x)dx$ est décroissante sur $]0,\infty[$. Lorsque μ est une fonction positive, la solution du problème (1.1), (1.2) est positive. Il est donc naturel d'étudier :

- d'une part le comportement asymptotique de $\int_{\mathbb{R}^d} u(t,x)dx$ lorsque $t \to \infty$
- d'autre part de rechercher si $\int_{\mathbb{R}^d} u(t,x)dx$ admet un taux de décroissance lorsque $t \to \infty$.

Si μ est une fonction positive, régulière et à support compact, M. Ben Artzi [B] montre que la solution de (1.1), (1.2) vérifie :

$$\exists \alpha > 0, \quad \exists C > 0 \text{ tels que : } t^\alpha \int_{\mathbb{R}^d} u(t,x)dx \leq C \tag{1.3}$$

où α ne dépend que de la dimension d, mais n'est pas précisé, et où C dépend aussi de d et $||\mu||_{W^{1,\infty}(\mathbb{R}^d)}$.

Lorsque μ est une mesure positive de masse totale finie, S. Benachour, H. Brézis et M. Pierre [BBP] montrent que la solution de (1.1), (1.2) vérifie les deux propriétés suivantes :

$$\lim_{t\to\infty} \int_{\mathbb{R}^d} u(t,x)dx = 0 \tag{1.4}$$

(1.5) il n'existe pas de fonction $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ tendant vers 0

quand $t \to \infty$ et telle que, pour toute solution positive u de (1.1), (1.2) on ait :

$$\int_{\mathbb{R}^d} u(t,x)dx \leq f(t) \int u(0,x)dx$$

En ce sens, $\int_{\mathbb{R}^d} u(t,x)dx$ n'admet pas de taux de décroissance.

3. Dans cette étude nous nous proposons d'analyser les solutions de (1.1), (1.2) lorsque la dimension d'espace est égale à un. Notre contribution est essentiellement la construction explicite de la solution du problème de Cauchy (1.1), (1.2) dans les deux cas suivants :

i) la donnée initiale μ est égale à la masse de Dirac à l'origine.
ii) la donnée initiale μ est une mesure positive, de masse totale finie et "profilée" (cf l'alinéa 7 ci-dessous pour une définition précise de ce terme). Pour fixer les idées, lorsque μ est une fonction dérivable, profilée signifie que $\operatorname{sgn} \mu'(x) = -\operatorname{sgn}(x)$.
L'idée de la construction explicite de la solution est la suivante : on remplace l'équation non linéaire (1.1) par l'équation linéarisée :

$$u_t - \frac{1}{2} u_{xx} = (\operatorname{sgn} x).u_x \tag{1.6}$$

$$u(0,.) = \mu(.). \tag{1.7}$$

On résout alors explicitement l'équation linéarisée par une méthode probabiliste, puis on constate que, lorsque μ est profilée, la solution du problème linéaire est également solution du problème non linéaire (1.1), (1.2).

4. La connaissance explicite de la solution de (1.1) (1.2), pour une large classe de mesures μ, jointe à l'utilisation du principe de comparaison, nous permet alors d'étudier de façon fine le comportement de la solution. Plus précisément :
a) dans le théorème 3.3, nous redémontrons, par des arguments probabilistes simples, les résultats (1.4) et (1.5) sur la décroissance vers 0 de $||u(t,.)||_1$ et sur l'inexistence de taux de décroissance; dans les théorèmes 4.1 et 4.4, nous améliorons ce résultat en montrant comment ce taux de décroissance dépend de la "queue de la mesure μ", ie de $\varphi_\mu(t) = \int_{|x|>t} \mu(dx)$

b) lorsque la mesure μ possède un moment exponentiel, ie :

$$C(\mu) = \int_{\mathbb{R}} |x| e^{|x|} \mu(dx) < \infty,$$

nous obtenons (cf. théorème 4.8) la vitesse optimale de décroissance de $||u(t,.)||_1$. Plus précisément, nous montrons l'existence de deux constantes universelles C_1 et C_2 telles que :

$$C_1 C'(\mu) \leq \varliminf_{t\to\infty} t^{3/2} e^{t/2} ||u(t,.)||_1 \leq \varlimsup_{t\to\infty} t^{3/2} e^{t/2} ||u(t,.)||_1 \leq C_2.C(\mu). \tag{1.8}$$

Bien sûr, (1.8) améliore le résultat (1.3) de M. Ben Artzi puisque :
- il donne la vitesse exacte de décroissance de $||u(t,.)||_1$ qui est en $e^{-t/2}\frac{1}{t^{3/2}}$, et qui est donc exponentielle,
- il est vrai pour des mesures à moment exponentiel, et pas seulement pour des mesures à support compact.

Remarquons que l'estimation (1.8) montre un comportement de $||u(t,.)||_1$ très différent de la situation de l'équation de la chaleur. On peut donc dire que, dans (1.1), le terme de convection $-|u_x|$ joue un rôle prépondérant.

La connaissance explicite de la solution de (1.1), (1.2) nous permet également d'obtenir d'autres estimations intéressantes :

c) Lorsque μ est profilée, on a :

$$||u(t,.)||_\infty \leq C\frac{(log\, t)^{1/2}}{t}||\mu||_1 \qquad (t \geq 1)$$
$$||u_x(t,.)||_1 \leq \frac{C}{t}||\mu||_1 \qquad (t \geq 1).$$

5. Dans le dernier paragraphe de ce travail (§ V) nous nous intéressons cette fois à l'équation :

$$u_t - \frac{1}{2}u_{xx} = |u_x| \tag{1.9}$$

$$u(0,.) = \mu(.) \tag{1.10}$$

Les méthodes mises en oeuvre pour étudier (1.1), (1.2) fonctionnent, mutatis mutandis, de la même manière pour (1.9), (1.10). Nous déterminons la solution explicite de (1.9), (1.10) pour des mesures μ profilées et, à partir de cette solution explicite, des estimations de $||u(t,.)||_1$. Par exemple, nous obtenons (théorème 5.4) :

Si μ est profilée et si u est la solution de (1.9), (1.10) :

$$\begin{aligned} C_1 \int_{\mathbb{R}} e^{-2|a|}\mu(da) &\leq \varliminf_{t\to\infty} \frac{1}{1+t}||u(t,.)||_1 \\ &\leq \varlimsup_{t\to\infty} \frac{1}{1+t}||u(t,.)||_1 \leq C_2 \int_{\mathbb{R}} e^{-2|a|}|a|\mu(da) \end{aligned} \tag{1.11}$$

$$\begin{aligned} C_1 \int_{\mathbb{R}} e^{-2|a|}\mu(da) &\leq \varliminf_{t\to\infty} ||u(t,.)||_\infty \\ &\leq \varlimsup_{t\to\infty} ||u(t,.)||_\infty \leq C_2 \int_{\mathbb{R}} e^{-2|a|}|a|\mu(da) \end{aligned} \tag{1.12}$$

où C_1, C_2 sont des constantes universelles.

6. Nous avons choisi, pour ce travail, de nous placer dans le cas où la dimension d vaut 1. Lorsque $d > 1$, l'approche probabiliste choisie ici, continue à être opérationnelle. Cependant, les formules explicites obtenues ne sont plus si simples. En particulier, elles dépendent de fonctionnelles liées au pont de Bessel. C'est pourquoi nous nous sommes limités ici au cas $d = 1$. Le cas $d > 1$ fera l'objet d'une étude ultérieure (cf. [B.R.V.]).