SUR L'ÉDUCATION MATHÉMATIQUE

Vladimir I. ARNOLD
Université Paris IX et Institut Steklov

Difficile est saturam non scribere.

Juvenal, Satura I, 30.

Les mathématiques font partie de la physique. La physique est une science expérimentale, une des sciences naturelles. Les mathématiques, ce sont la partie de la physique où les expériences ne coûtent pas cher.

L'identité de Jacobi (qui force les trois hauteurs d'un triangle à être concourantes) est tout autant un fait expérimental que la rotondité de la Terre (le fait que la terre soit homéomorphe à une boule), mais cela revient moins cher à vérifier ! Au milieu du XX^e siècle on a essayé de séparer les mathématiques de la physique. Les résultats ont été catastrophiques ! On a vu apparaître des générations entières de mathématiciens ignorant la moitié de leur science — n'ayant d'ailleurs pas la moindre idée d'aucune autre. Ils ont commencé à enseigner leur horrible scolastique pseudomathématique, d'abord aux étudiants, puis aux lycéens, en oubliant le principe de Hardy, selon lequel il n'y a pas de refuge permanent sous le soleil pour des mathématiques laides. Comme de telles mathématiques scolastiques, séparées de la physique, ne sont adaptées ni à l'enseignement, ni à aucune application éventuelle à d'autres sciences, les mathématiciens se sont fait haïr des lycéens (dont certains ensuite sont devenus ministres[1]) et des utilisateurs. La construction sans harmonie faite par des mathématiciens ruminant leurs complexes d'ignorance vis-à-vis de la physique me fait penser à la construction axiomatique des nombres impairs. Il est évident qu'on peut construire une telle théorie, on peut même la faire admirer par les élèves pour sa beauté et son architecture interne (on a par exemple que la somme d'un nombre impair de nombres impairs est toujours bien définie ainsi que le produit de nombres impairs). De ce point de vue sectaire, les nombres pairs sont une hérésie ; mais on peut aussi les introduire plus tard dans la théorie comme « nombres idéaux », ceci pour s'adapter aux besoins de la physique et du monde réel. Malheureusement, c'est une construction similaire qui a dominé l'enseignement de la mathématique en France pendant des décades.

[1]NTD Cet article a été écrit pour une revue moscovite

Cette perversion, née en France, s'est vite répandue à l'enseignement de base des mathématiques, d'abord aux étudiants, puis aux élèves, d'abord en France, puis ailleurs, Russie inclue. A la question « Combien font 2 +3 ? » un élève d'école français a répondu « 3 +2, puisque l'addition est commutative ». Il ne savait même pas à quoi cette somme était égale, il ne comprenait même pas ce qu'on lui demandait ! Un autre élève (tout a fait sensé selon moi) définissait les mathématiques de la manière suivante : « Il y a des carrés, encore faut-il le prouver ! » Selon mon expérience pédagogique en France, l'idée de la mathématique chez les étudiants n'est pas très éloignée de celle de cet écolier. C'est même vrai pour les normaliens (j'ai la plus grande pitié pour ces étudiants, qui ne manquent évidemment pas d'intelligence par nature mais sont estropiés par un enseignement abêtissant). Par exemple les normaliens n'ont jamais vu de paraboloïde hyperbolique de leur vie et si on leur demande la forme de la surface d'équation

$$xy = z^2$$

cela provoque chez eux de la stupeur ! Dessiner la courbe donnée sous forme paramétrique par exemple par

$$x = t^3 - 3t$$
$$y = t^4 - 2t^2$$

est un problème insoluble pour les étudiants (et probablement pour la majorité des professeurs français de mathématiques). Pourtant, à l'époque du premier manuel d'analyse de l'Hôpital (*Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes*, Paris 1696) et en gros jusqu'au manuel de Goursat la capacité de résoudre de tels problèmes était considérée — autant que la connaissance des tables de multiplication — comme une part indispensable du bagage de tout mathématicien. Les zélotes de la mathématique superabstraite, privés par les Dieux de l'imagination géométrique, ont éliminé toute la géométrie de l'éducation, alors que c'est à travers elle que passent le plus souvent les relations avec la physique et le réel. Les manuels de Goursat[2], Hermite, Picard, ont failli récemment être jetés de la bibliothèque universitaire de Jussieu, comme obsolètes et donc néfastes (on ne les a conservés que sur mon intervention). Les normaliens, qui avaient déjà suivi des cours de géométrie algébrique et de géométrie différentielle donnés par des mathématiciens respectés, se sont révélés ignorant de la surface riemannienne associée

[2]NDT Pauvre Goursat, il en a eu des malheurs : C'est déjà pour remplacer son manuel « out of date » que se sont manifestées les premières velléités, alors pédagogiques, de N. Bourbaki : cf. discours d'H. Cartan en 1958, publié en anglais en 1980, The Math. Intelligencer vol. 2, 4. 1980, page 176

à une courbe elliptique et aussi de la classification topologique des surfaces (sans parler des intégrales elliptiques de première espèce ni de la structure de groupe d'une courbe elliptique ou du théorème d'addition : ils n'ont appris que les structures de Hodge et les variétés jacobiennes !) Comment a-t-on pu en arriver là, en France, le pays de Lagrange, de Cauchy et Poincaré, de Jean Leray et de René Thom ? Je me souviens de l'explication que m'a proposé Petrovski en 1966 du comportement des mathématiciens : les vrais mathématiciens ne forment pas de gangs, mais les faibles en ont besoin pour survivre.[3]

Ils peuvent se regrouper sous différentes banderoles (la superabstraction, l'antisémitisme ou les problèmes « appliqués et industriels »), mais cela se fait toujours essentiellement pour résoudre un problème de nature sociale : comment survivre dans un environnement intellectuel plus qualifié ? Je me souviens d'ailleurs des mots de Louis Pasteur « il n'y a jamais eu et il n'y aura jamais de « sciences appliquées », il n'y a que des applications de la science » (souvent très utiles !) Il m'est arrivé de mettre en doute la réflexion de Petrovski, mais aujourd'hui je suis de plus en plus convaincu de son exactitude. Une part significative de la mathématique dite abstraite se réduit tout simplement à une appropriation systématique et impudente des résultats chez les créateurs, pour ensuite les attribuer aux épigones généralisateurs. De même que l'Amérique ne porte pas le nom de Colomb, les résultats mathématiques ne portent presque jamais le nom de ceux qui les ont découverts. Je dois remarquer que mes résultats n'ont jamais fait l'objet de pareils détournements, mais c'est arrivé systématiquement à mes maîtres (Kolmogorov, Petrovski, Pontryagin, Rohlin) comme à mes élèves.

Le professeur Michael Berry a formulé les deux principes suivants :

— Principe d'Arnold : Si une notion porte un nom propre, ce n'est pas celui de son créateur.

— Principe de Berry : Le principe d'Arnold s'applique à lui-même.

Revenons à l'enseignement des mathématiques en France. Quand j'étais étudiant en première année à l'Université de Moscou, le cours d'Analyse était fait par Toumarkin, un spécialiste de topologie et théorie des ensembles, et il suivait un cours à la française (comme Goursat). Il nous apprenait que les intégrales de fonctions rationnelles le long de courbes algébriques s'expriment au moyen de fonctions élémentaires si la surface de Riemann correspondante est une sphère, et qu'en général elles ne s'expriment pas ainsi si le genre est supérieur, et que pour que la surface de Riemann soit une sphère il suffit qu'il existe pour une courbe de degré fixé un assez grand nombre de points doubles (qui obligent la

[3]NDT Ceci ne s'applique évidemment qu'aux mathématiciens russes.

courbe à être unicursale : on peut dessiner les points réels dans le plan projectif d'un seul trait). Ces faits en eux-mêmes excitent l'imagination, même sans aucune démonstration, et donnent une meilleure idée des mathématiques contemporaines que plusieurs volumes de Bourbaki. Ils nous apprennent en effet qu'il existe des relations remarquables entre des faits apparemment sans rapports : l'existence d'une expression d'intégrales en termes de fonctions élémentaires et la topologie de la surface de Riemann correspondante, ou encore le lien entre le nombre de points doubles et le genre de la surface, qui en plus se manifeste dans le plan réel comme la propriété d'unicursalité. Déjà Jacobi affirmait que c'était le plus grand attrait de la mathématique que de voir apparaître la même fonction dans la représentation d'un nombre entier comme somme de quatre carrés et dans le mouvement du pendule. La découverte de ces liens entre objets mathématiques éloignés peut être comparée à celle des rapports entre l'électricité et le magnétisme en physique, ou de la ressemblance entre la Côte Ouest de l'Afrique et la Côte est de l'Amérique en géologie. Il est difficile de surestimer la valeur émotionnelle de ces découvertes dans l'enseignement. Elles nous apprennent en effet à chercher et à trouver d'autres manifestations de l'unité du monde. La dégéométrisation de l'éducation mathématique et le divorce avec la physique brisent ces relations. Par exemple, les étudiants d'aujourd'hui, comme les géomètres algébristes modernes ne connaissent plus en général le fait (voir la remarque de Jacobi) que l'intégrale elliptique de première espèce exprime le temps le long d'une courbe elliptique pour le système dynamique hamiltonien correspondant. En reprenant les mots connus sur l'électron et l'atome[4], on peut dire que l'hypocycloïde est aussi inépuisable qu'un idéal de l'anneau des polynômes. Mais enseigner les idéaux de polynômes à des étudiants qui n'ont jamais vu d'hypocycloïde est aussi absurde que d'enseigner l'addition des fractions à des enfants qui n'auraient jamais divisé une pomme ou un gâteau en parties égales, ne serait-ce que mentalement. Il ne faut pas s'étonner ensuite qu'ils préfèrent ajouter le numérateur au numérateur et le dénominateur au dénominateur.

[4] Lénine « L'électron est aussi inépuisable que l'atome ! »

Mes amis français m'ont dit que la tendance à la généralisation toujours plus abstraite est une tradition nationale[5]. Je me demande effectivement s'il ne s'agit pas d'une maladie héréditaire, mais je souligne tout de même que j'ai emprunté l'exemple de la pomme et du gâteau à Poincaré. Le schéma de construction d'une théorie mathématique ressemble tout à fait à celui de n'importe laquelle des autres sciences naturelles. Au début nous étudions certains objets, nous faisons des observations dans différentes circonstances. Puis nous cherchons à trouver les limites d'applications de nos observations, nous cherchons des contre-exemples, en évitant de trop généraliser (exemple : le nombre de partitions des entiers impairs 1, 3, 5, 7, 9 en un nombre impair de parties forme la suite 1, 2, 4, 8, 16, mais ensuite apparaît le nombre 29). A la suite de ces observations nous formulons si possible une conjecture comme découverte empirique (par exemple la conjecture de Fermat, celle de Poincaré). Puis arrive la période difficile où il s'agit de vérifier si nos conjectures sont à la hauteur des réalités. En mathématique a été mise au point une technique particulière qui peut parfois être utile pour les applications pratiques mais qui peut nous induire en erreur. Elle s'appelle la *modélisation.* Pour la construction d'un modèle on fait l'idéalisation suivante : certains faits, connus seulement avec un certain degré d'approximation ou de probabilité, sont considérés comme absolument vrais et sont pris comme « axiomes ». La signification de cet « absolu » est exactement que nous nous permettons d'agir avec ces « faits » selon les règles de la logique formelle, en appelant « Théorèmes » les déductions que nous en tirons. Il est clair que dans aucune action réelle on ne peut s'appuyer entièrement sur de telles déductions, parce que les paramètres des phénomènes étudiés ne sont pas connus tout à fait exactement, et qu'une petite modification (par exemple des conditions initiales du processus) peut complètement bouleverser le résultat. C'est ainsi qu'il n'est pas possible d'espérer des prévisions météorologiques dynamiques sur une longue période, et que

[5]Il semble que le premier « Bourbakiste » ait été Descartes, qui a subordonné toute les sciences à des axiomes simples en voulant en déduire tout le reste par des déductions mathématiques. Quand Pascal, encore très jeune, a confirmé par des expériences célèbres (en remplaçant le mercure de l'Italien Toriccelli par du vin français), que l'axiome « la nature a horreur du vide » est faux, il est venu en discuter avec le grand Maître des Sciences de l'époque, Descartes. Comme ces expériences infirmaient ses théories, Descartes, méprisant, a désapprouvé les théories de Pascal ; il a écrit quelque temps après à Huygens que le seul vide auquel il croyait était celui du cerveau de Pascal. Quelque mois plus tard le prophète de l'axiomatisme prétendait déjà avoir suggéré à Pascal ces expériences. Ref. Henri Gee, « L'Auvergne, berceau du voyage spatial », Le Monde, le 3 avril 1998, p. 24