MÉMOIRES DE LA S. M. F.

LAURE BLASCO

Paires duales réductives en caractéristique 2

Mémoires de la S. M. F. 2^e série, tome 52 (1993), p. 1-73
<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1993_2_52__1_0>

Société Mathématique de France
Mémoire n° 52
Supplément au Bulletin de la S.M.F.
Tome 121, 1993, fascicule 1, pp. 1-73.

Paires duales réductives en caractéristique 2

Laure Blasco

Résumé. Sur un corps local de caractéristique 2, A.Weil a défini le groupe métaplectique comme extension d'un groupe dit pseudosymplectique. Cependant, les paires de sous-groupes réductifs (G, G') de ce groupe, duales au sens où G et G' sont les commutants l'un de l'autre, n'avaient pas été classifiées. Une classification complète est ici établie, ainsi que la trivialité de l'extension métaplectique restreinte à ces sous-groupes.

Abstract. Over a local field of characteristic 2, A.Weil has defined the metaplectic group as an extension of a group called "pseudosymplectique". However, the pairs of reductive subgroups (G, G') of this group, dual in the sense that G and G' are each others centralizers, had not been classified. A complete classification is established here, as well as the triviality of the metaplectic extension restricted to these subgroups.

AMS subjects classification ; 11F27, 22E50
11F70, 20G25, 20G40

Texte reçu le 1er juin 1992, révisé le 31 juillet 1992.

Institut de Recherche Mathématique Avancée. Université Louis Pasteur et CNRS.
7, Rue René Descartes. 67084 Strasbourg Cedex. France.

Introduction

Analysant les travaux de C.L. Siegel sur les formes quadratiques, A. Weil montre en 1964, le rôle capital que joue dans la théorie des fonctions thêta, une représentation unitaire (projective) du groupe dit pseudosymplectique [15].

Poursuivant dans cette voie, R. Howe propose une théorie générale [6] qui explique la dualité entre certains groupes classiques, dualité mise en évidence par de nombreux auteurs. R. Howe introduit la notion de paires duales réductives (c'est-à-dire de paires (G, G') de sous-groupes réductifs, duales au sens où G et G' sont les commutants l'un de l'autre) et définit une correspondance entre certaines représentations projectives irréductibles de ces sous-groupes à l'aide de la représentation de Weil.

Cette théorie, développée sur les corps de caractéristique nulle ou impaire, peut-elle être élargie à des corps de caractéristique 2 ?

Répondre à cette question nécessite de revenir à l'article d'A. Weil [15]. Il apparaît alors que le groupe pseudosymplectique n'est plus isomorphe au groupe symplectique mais est une extension d'un groupe orthogonal.

Plus précisément, considérons un corps F de caractéristique 2, fini ou local, et W un espace vectoriel sur F muni d'une forme quadratique Q non dégénérée et non défective, d'indice quelconque (I.1.1) (A. Weil s'intéresse au cas d'indice maximal). Notons $O(Q)$ le groupe des isométries de (W, Q). Le groupe pseudosymplectique est alors une extension de $O(Q)$ par le module $\mathcal{Q}_a(W)$ des formes quadratiques additives définies sur W. Cette extension est, en général, non triviale (I.1.3).

Nous remarquons que l'existence de formes quadratiques additives non nulles est propre à la caractéristique 2. Elle est source de nouveaux problèmes pour la recherche des paires duales et pour l'étude de l'extension métaplectique.

Cette étude fait l'objet du paragraphe I.2. Le groupe pseudosymplectique au-dessus de $O(Q)$, défini précédemment, est formé d'automorphismes d'un groupe de Heisenberg (I.1.2) triviaux sur le centre. Par le théorème de Stone-Von Neumann, encore valable sous nos hypothèses, nous construisons l'extension métaplectique (I.2.1). Celle-ci présente deux particularités (que nous mettons en évidence sur sa restriction au sous-groupe $\mathcal{Q}_a(W)$ (I.2.2)) : être d'ordre exactement 2 que F soit fini ou local ; avoir des éléments qui ne commutent pas quand bien même leurs projections commuteraient dans le groupe pseudosymplectique.

Dans l'étape suivante nous classifions les paires duales réductives du groupe pseudosymplectique (II.1 et 2). Elles sont de la forme : deux groupes linéaires ou un groupe symplectique et un groupe orthogonal ou deux groupes unitaires ou encore, une des deux paires duales triviales. Nous reconnaissons là les différentes "familles" obtenues pour les autres caractéristiques. Par ailleurs, quand cela doit être précisé, nous décrivons les sous-groupes du groupe pseudosymplectique qui interviennent (II.2.2).

Mais revenons à la démonstration établissant la classification. Dans un premier temps nous avons recherché les paires duales réductives de $O(Q)$ par des méthodes communes aux autres caractéristiques [8] (II.1). Nous abandonnons ensuite ces méthodes pour décrire à partir de la classification obtenue un procédé qui nous permet de construire des paires duales réductives du groupe pseudosymplectique (II.2.2). Nous en dressons la liste (II.2.1 proposition b). Est-elle complète ?

Le vérifier exige la connaissance de certaines propriétés des paires duales réductives du groupe pseudosymplectique (II. 2.1 théorème c). De ces propriétés et du lemme 2.4, nous déduisons, pour chaque paire duale réductive non triviale (G, G') du groupe pseudosymplectique, l'existence d'une paire duale réductive (K, K') déjà répertoriée telle que les projections de K et K' sur $O(Q)$ contiennent celles de G et G' respectivement : de là, via le corollaire 2.1.d, l'exhaustivité de la liste établie (II.2.1 théorème e).

Le dernier paragraphe traite de la restriction de l'extension métaplectique aux paires duales réductives. Cette restriction est toujours scindée (sauf au-dessus des paires duales triviales).

Il apparaît en outre que les images réciproques des composantes d'une paire duale non triviale commutent dans l'extension métaplectique. Ainsi donc, nous pouvons étendre la correspondance locale de Howe au cas de caractéristique 2 et retrouver des situations connues.

Nous pouvons également étudier les propriétés de cette correspondance. En particulier, elle s'avère être "compatible" avec l'induction parabolique. Pour le démontrer, il suffit de suivre, mutatis mutandis, le raisonnement de S. Kudla [7] et ses variantes [8, Ch.3 §§IV et V]. Ce dernier point n'est pas développé dans le présent article.

L'ensemble de ces résultats est issu d'une nouvelle thèse préparée à l'université de Paris-Sud (Orsay) sous la direction de Guy Henniart. Qu'il trouve ici l'expression de ma profonde gratitude.

NOTATIONS : On fixe un corps commutatif F de caractéristique 2, fini ou local dans le chapitre II. On note F^2 le sous-corps de F formé des carrés de F ; si F est local, $\mathcal{O}_F$ désigne l'anneau des entiers de F et $\mathfrak{p}_F$ son idéal maximal.

Soit ψ un caractère additif non trivial de F.

On considère un espace vectoriel W sur F , de dimension finie et muni d'une forme quadratique Q dont la forme alternée associée est notée $<,>$.

$\delta_{i,j}$ désigne le symbole de Kronecker.

I. EXTENSION MÉTAPLECTIQUE

§ 1. Groupes pseudosymplectiques

1.1. Formes quadratiques en caractéristique 2 [3,Ch.I,§ 16]

Soit V un espace vectoriel de dimension finie sur F.

Une *forme quadratique* q sur V est une application de V dans F définie à l'aide d'une forme bilinéaire b par : $q(v) = b(v, v)$, $v \in V$. Une forme bilinéaire alternée, notée $(,)$, lui est associée de la façon suivante :

$$\text{pour tout } (v, v') \in V^2, \quad (v, v') = q(v + v') + q(v) + q(v') = b(v, v') + b(v', v).$$

Ces trois objets ne se déterminent pas l'un l'autre. D'une part, deux formes quadratiques q et q' ont la même forme alternée associée si et seulement si $q + q'$ est additive; d'autre part, deux formes bilinéaires b et b' définissent la même forme quadratique si et seulement si la forme bilinéaire $b + b'$ est alternée.

On note $\mathcal{Q}(V)$ l'ensemble des formes quadratiques sur V, $\mathcal{Q}_a(V)$ le sous-ensemble des formes quadratiques additives sur V et $\mathcal{Q}_a^2(V)$ le sous-ensemble de $\mathcal{Q}_a(V)$ formé des formes quadratiques additives dont les valeurs sont des carrés de F.

Soit $q \in \mathcal{Q}(V)$ et $(,)$ la forme alternée associée. Un sous-espace vectoriel X de V est *isotrope* si l'intersection de X et son orthogonal $X^\perp$ n'est pas nulle. Si en outre X est contenu dans $X^\perp$, X est dit *totalement isotrope*. Un sous-espace vectoriel X, totalement isotrope et sur lequel q est nulle, est dit *singulier*.

Un sous-espace vectoriel de V est *hyperbolique* s'il admet une *base hyperbolique* $(e_1, \cdots, e_p, e_{-1}, \cdots, e_{-p})$ c'est-à-dire telle que

$$\begin{aligned} &(e_i, e_j) = \delta_{i,-j} && \text{pour tout} \quad i, j \in \{-p, \cdots, -1, 1, \cdots, p\} \\ \text{et} \quad &q(e_i) = 0 && \text{pour tout} \quad i \in \{-p, \cdots, -1, 1, \cdots, p\}. \end{aligned}$$

Une base ne vérifiant que la première condition est dite *symplectique*.

On suppose que q est *non dégénérée et non défective* (i.e. la forme $(,)$ est non dégénérée).

Alors si X est un sous-espace vectoriel de V totalement isotrope, il existe, pour toute base $(e_i)_{i \in I}$ de X, des vecteurs $(e_{-i})_{i \in I}$ de V tels que

$$(e_i, e_{-j}) = \delta_{i,j} \quad \text{pour tout} \quad i, j \in I.$$

Si de plus X est singulier, on peut choisir les vecteurs $(e_{-i})_{i \in I}$ singuliers [3 p. 34]. Ainsi, si X est un sous-espace vectoriel singulier de V de dimension maximale, il existe un sous-espace vectoriel Y de V, de même dimension que X, tel que $X \oplus Y$ soit hyperbolique. Alors $(X \oplus Y)^{\perp}$ est un sous-espace vectoriel sans éléments singuliers et V se décompose en somme orthogonale

$$V = (X \oplus Y) \oplus (X \oplus Y)^{\perp}.$$

La dimension de X s'appelle *l'indice de q* et est notée $\nu(q)$.

1.2. Le groupe de Heisenberg

Soit Q une forme quadratique sur W, non dégénérée et non défective. Alors W est de dimension paire notée $2n$. On note $<,>$ la forme alternée de Q.

Pour toute forme bilinéaire B définissant Q, on définit un groupe de Heisenberg $H(B)$ par [15 § 31] :

$$H(B) = W \times F$$

muni de la loi

$$(w,t), (w',t') \in H(B), \; (w,t)(w',t') = (w + w', t + t' + B(w,w')).$$

Si B' est une autre forme bilinéaire définissant Q, on définit de même le groupe de Heisenberg $H(B')$. Soit q une forme quadratique dont la forme alternée est $B + B'$. Posons $\alpha_q(w,t) = (w, t + q(w))$, $(w,t) \in H(B)$. Alors α_q est un isomorphisme entre $H(B)$ et $H(B')$.

THÉORÈME DE STONE-VON NEUMANN. — *Supposons que F est fini ou local. A isomorphisme près, il existe une et une seule représentation $(\rho, \mathcal{V})$ de $H(B)$, lisse et irréductible, telle que, pour tout $t \in F$,*

$$\rho((0,t)) = \psi(t) id_{\mathcal{V}}.$$

La démonstration est celle exposée dans [8,Ch.2] à quelques modifications près que nous allons préciser.

Preuve : La démonstration de l'existence d'une telle représentation est en tout point semblable à celle de [8, Ch. 2, I.3] (il suffit de remarquer que $\delta(-a) = \delta(a)^{-1}$: en caractéristique 2, cela donne $\delta(a) \cdot (0, Q(a))$).

Exemples.

1. Soient $W = X \oplus Y$ une *polarisation complète* de W (i.e. X et Y sont des sous-espaces vectoriels totalement isotropes, de dimension maximale) et ψ_X un caractère du sous-groupe $X \times F$ de $H(B)$ prolongeant ψ.
On définit le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathcal{H}(X, \psi_X)$ (ou $\mathcal{H}(X, \psi_X, B)$ s'il y a ambiguïté) par :
   – si F est fini, $\mathcal{H}(X, \psi_X)$ est formé des fonctions ϕ sur $H(B)$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ telles que :
   (1)
   $$\forall x \in X,\ \forall t \in F,\ \forall h \in H(B), \quad \phi((x,t)h) = \psi_X((x,t))\phi(h)$$
   – si F est local, $\mathcal{H}(X, \psi_X)$ est formé des fonctions ϕ sur $H(B)$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ localement constantes, à support compact modulo $X \times F$ et vérifiant (1).
Le groupe $H(B)$ agit sur $\mathcal{H}(X, \psi_X)$ par translations à droite. La représentation $(\rho_\psi, \mathcal{H}(X, \psi_X))$ de $H(B)$ ainsi obtenue vérifie les conditions du théorème.
De plus, $\mathcal{H}(X, \psi_X)$ est isomorphe au $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathcal{S}(Y)$ des fonctions de Y dans $\mathbb{C}$ si F est fini, et au $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathcal{S}(Y)$ des fonctions de Y dans $\mathbb{C}$, localement constantes à support compact si F est local.
On a alors, pour tout $x \in X$, $y \in Y$, $t \in F$ et $\varphi \in \mathcal{S}(Y)$,
$$\rho_\psi((x+y,t))\varphi(y') = \psi(t + < y', x > + B(x+y', y))\psi_X((x,0))\varphi(y+y'), \quad y' \in Y.$$

2. On suppose que F est local.
Soit L un réseau de W. On définit le réseau L^* par
$$L^* = \{w \in W | \forall \ell \in L, < \ell, w > \in \mathcal{E}_\psi\}$$
où $\mathcal{E}_\psi$ est le plus grand sous $\mathcal{O}_F$-module contenu dans Ker ψ. On suppose $L = L^*$. En remplaçant $X \times F$ par $L \times F$ dans l'exemple précédent, on obtient une "autre" représentation répondant au problème.

Remarquons que si $(\rho, \mathcal{V})$ est une représentation de $H(B)$ satisfaisant les conditions du théorème alors sa contragrédiente $(\rho^\vee, \mathcal{V}^\vee)$ vérifie les mêmes