MÉMOIRES DE LA S. M. F.

PHILIPPE ELLIA

Sur les fibrés uniformes de rang $(n + 1)$ sur P^n

Mémoires de la S. M. F. 2^e série, tome 7 (1982)

http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1982_2_7__1_0

© Mémoires de la S. M. F., 1982, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mémoires de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Memoires/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

SUR LES FIBRÉS UNIFORMES DE RANG $(n+1)$ SUR $\mathbb{P}^n$

ELLIA Philippe (*)

Résumé : On sait que les fibrés vectoriels algébriques uniformes de rang au plus n sur l'espace projectif de dimension n sont homogènes et on en connaît la liste. Dans le présent travail, on établit la liste, qui ne comporte pas de surprise, des fibrés homogènes de rang $n+1$ et $n+2$ sur ce même espace projectif, et on aborde l'étude des fibrés uniformes de rang $n+1$: le résultat principal assure que ceux-ci sont homogènes si $n+1$ vaut 4, 5 ou 6 ou bien si $n+1$ est un nombre premier. Ce sont certains calculs dans des anneaux de cohomologie qui conduisent à des problèmes d'arithmétique qu'on n'a pas su résoudre sans l'hypothèse précédente sur n .

Summary : It is known that uniform algebraic vector bundles of rank at most n over a projective space of dimension n are homogeneous and listed. In the present work, we establish the list of homogeneous vector bundles of rank $n+1$ or $n+2$ over the same projective space and we start studying uniform bundles of rank $n+1$: the main result says that they are homogeneous, provided $n+1$ equals 4, 5 or 6, or is prime. Indeed, calculation in some cohomology rings leads to number theoretic questions we could not answer without such assumptions.

Table des Matières

Introduction

Chapitre 1 :	Le diagramme standard	6
Chapitre 2 :	Fibrés homogènes de rang $(n+1)$ et $(n+2)$ sur $\mathbb{P}^n$	10
Chapitre 3 :	La relation $(\&)$ pour les fibrés de rang $(n+1)$	19
Chapitre 4 :	Certains types de fibrés uniformes	28
Chapitre 5 :	$n = p - 1$	36
Chapitre 6 :	Fibrés uniformes de rang $(n+1)$ sur $\mathbb{P}^n$ pour de petites valeurs de n .	51
Bibliographie		60

(*) Boursier DGRST

INTRODUCTION

Tous les fibrés en question sont vectoriels algébriques.

On note $\mathbb{P}^n := \mathbb{P}^n(K)$ où K est un corps algébriquement clos de caractéristique nulle. Un fibré E sur $\mathbb{P}^n$ est uniforme s'il existe une suite d'entiers (appelée type de scindage de E) : $(k; r_1 \dots r_k; \mu_1 \dots \mu_k)$ avec $\mu_1 > \dots > \mu_k$, telle que pour toute droite ℓ de $\mathbb{P}^n$: $E/\ell \cong \bigoplus_{i=1}^k r_i \cdot \mathcal{O}_\ell(\mu_i)$.

La classification de ces fibrés est connue dans certains cas :

THÉOREME 0 : ([vdV], [Sa], [Ele,1], [E-H-S]) :

Pour $r \leq n$, $n \geq 2$ et pour $r=3$, $n=2$, les fibrés uniformes de rang r sur $\mathbb{P}^n$ sont (à isomorphisme près) : $\bigoplus r_i \cdot \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_i)$, $T_{\mathbb{P}^n}(a)$, $\Omega_{\mathbb{P}^n}^1(b)$, $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(\alpha) \oplus T_{\mathbb{P}^2}(\beta)$, $S^2 T_{\mathbb{P}^2}(\gamma)$.

En particulier tous ces fibrés sont homogènes (c'est-à-dire invariants sous les automorphismes de $\mathbb{P}^n$). Il est d'ailleurs facile de voir que tout fibré homogène est uniforme, mais la réciproque est fautive : il existe des fibrés uniformes sur $\mathbb{P}^n$ non homogènes en rang élevé ($\geq 2n$) (cf. [Ele,2], [E-H-S], [El1], [Dr]).

Le problème de la classification et de l'homogénéité des fibrés uniformes de rang r sur $\mathbb{P}^n$ reste donc ouvert si :

$$n+1 \leq r < 2n, \quad n \geq 3.$$

La principale contribution de ce travail peut se résumer dans les énoncés suivants :

THÉOREME I : Les fibrés homogènes sur $\mathbb{P}^n$ ($n \geq 3$) de rang $(n+1)$ sont (à isomorphisme près) : $\bigoplus r_i \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_i)$, $T_{\mathbb{P}^n}(a) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(b)$, $\Omega_{\mathbb{P}^n}^1(c) \oplus \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(d)$.

THÉOREME II : Les fibrés homogènes sur $\mathbb{P}^n$ ($n \geq 3$) de rang $(n+2)$ sont soit somme directe d'un fibré homogène de rang $(n+1)$ avec un fibré en droites, soit isomorphes à $\Lambda^2 T_{\mathbb{P}^4}(a)$.

THÉOREME III : Pour $n=3,4,5$ et $n=p-1$ où p est un nombre premier, les fibrés uniformes de rang $(n+1)$ sur $\mathbb{P}^n$ sont homogènes.

En ce qui concerne les deux premiers théorèmes leur démonstration est purement géométrique et repose sur le "diagramme standard" (I;§1). Le point de départ est le lemme (II;1.1) qui assure que les restrictions aux fibres de p (lesquelles s'identifient à des $\mathbb{P}^{n-1}$) des fibrés de la filtration relative de Harder-Narasimhan (I;§1)

SUR LES FIBRÉS UNIFORMES DE RANG (n+1) SUR $\mathbb{P}^n$

sont encore homogènes. L'étude de la restriction des suites exactes de la filtration permet alors de déterminer les fibrés associés, E_i , et donc (par I;§4 et II;1.3) le fibré E en question.

Pour la démonstration du théorème III la méthode suivie est essentiellement celle de [E-H-S]. On associe, de façon naturelle, à tout fibré uniforme E de rang (n+1) et de type de scindage $(k; r_1 \dots r_k; \mu_1 \dots \mu_k)$ une relation :

$$(\&) \quad P(T,U) + xU^{n+1} + (aT + bU + cU) \cdot R(U,V) = \prod_{i=1}^k S_i(T + \mu_i U, U, V)$$

où : $P(T,U) := T^{n+1} + c_1 U T^n + \dots + c_n U^n T$, les c_i étant les classes de Chern de E. Les $S_i(T,U,V)$ sont des polynômes homogènes de degré r_i , symétriques en U et V; x, a, b, c sont des entiers et $R(U,V)$ est le polynôme $(U^{n+1} - V^{n+1}) / (U - V)$ (cf. I;3.2, III;1.1).

La relation (&) est donc une condition topologique nécessaire à l'existence de fibrés uniformes d'un type de scindage donné. C'est par l'étude de cette relation que l'on classe les fibrés uniformes.

On se limite aux types de scindage consécutifs (i.e.: $\mu_i - \mu_{i+1} = 1, 1 \leq i \leq k-1$).

Cette restriction est sans conséquence (si car (K)=0) sur la classification en rang (n+1) (III;§2).

A ce sujet notons que (I;4.1) mesure la différence, du moins en ce qui concerne les fibrés uniformes, entre la caractéristique nulle et la caractéristique positive (cf. [Ein] qui classe les fibrés uniformes de rang n sur $\mathbb{P}^n$ en caractéristique p).

On résout (&) avec l'hypothèse supplémentaire $c=0$ (III;§2). Pour cela on se ramène notamment à une équation de degré n pour laquelle on peut utiliser les résultats de ([E-H-S]). Il s'agit maintenant de reconnaître parmi les solutions ainsi obtenues celles qui correspondent à des fibrés et, par-là même, identifier ces fibrés.

Pour mener à bien ce passage de la topologie à la géométrie, on utilise les méthodes standard de ([VdV], [Ele,1], [E-H-S]) : images directes, restriction, théorème de Riemann-Roch.

Les propositions de (I;§4) jouent un rôle primordial : (I;4.2) traite le type de scindage $k=1$: un fibré dont la restriction à toute droite est isomorphe à $r \cdot \mathcal{O}_q$ est trivial. Pour reconnaître les sommes directes de fibrés en droites $\oplus r_i \cdot \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_i)$, on dispose de (I;4.3) : si tous les fibrés associés à E ont leur première classe de Chern nulle, alors E est décomposé.

La proposition (I;4.4), quant à elle, donne une condition nécessaire et suffisante sur p^*E , pour que E ait comme sous-fibré un translaté convenable de $T_{\mathbb{P}^n}$: ceci permet de traiter les types de scindage avec $r_1=1$ (ou $r_k=1$).

Finalement il a fallu, pour les types de scindage avec $r_1=2$, utiliser dans ce contex-

te une proposition de ([Ba-VdV]) concernant les fibrés uniformes de rang deux sur $G(1,n)$, (cf. I;4.5).

A l'aide de tout cet arsenal on obtient le résultat suivant :
 en premier lieu, parmi les solutions algébriques trouvées il y en a une qui ne correspond pas à un fibré uniforme (III;2.2.2.b). Ceci est un fait nouveau qui ne se produit pas pour $r \leq n$ et $r = 3$. Par contre les autres solutions de ($\mathcal{E}$) avec $c = 0$ correspondent à tous les fibrés "attendus" (III;2.4).
 Ainsi pour démontrer le théorème suffit-il de prouver que, si c est non nul, les solutions algébriques de ($\mathcal{E}$) vérifient $k = 1$.

Pour résoudre la relation ($\mathcal{E}$) quand c est non nul on introduit la notion de "solutions primitives" c'est-à-dire de diviseurs symétriques $S_i(T,U,V)$ tels que $S_i(0,1,v) = 0$ ait pour solution une "bonne" racine de $x_i + (b_i + c v) R(1,v)$ (cf. par exemple V;§1).

On peut montrer en effet que si ($\mathcal{E}$) admet une solution primitive et si certaines conditions arithmétiques (sur c et b_i) sont vérifiées, les c_i ont alors une forme très simple (cf. V;1,2) pour laquelle on prouve $k = 1$ (cf. V;§6).

La difficulté principale est de montrer l'existence de ces solutions primitives.

Pour cela on s'intéresse au cas où n est de la forme $p - 1$ (p un nombre premier). Ceci parce que l'irréductibilité de $R(1,v)$ permet de montrer l'existence de "solutions primitives" (V;§3). Une solution primitive une fois choisie, on est conduit à étudier les conditions arithmétiques, sur c et b_i , qui sont l'obstruction à calculer les c_i . Par des arguments de la théorie des corps cyclotomiques, on montre que ces conditions sont en défaut si et seulement si: $c b_i = 0$, $c = \pm b_i$ (V;§4). Ces cas "pathologiques" (à part $c = 0$ déjà traité) sont étudiés en (V;§5). En utilisant, entre autre choses, l'irréductibilité de certains polynômes cyclotomiques (car $n = p - 1$) on montre que les solutions algébriques correspondantes vérifient: $k = 1$ ou $k = 2$, $r_1 = 1$ ($r_2 = 1$). Dans le dernier cas le passage à la géométrie se fait par (IV;§2). C'est en (V;§6) que l'on conclut la démonstration du théorème en prouvant que si toutes les conditions arithmétiques sont vérifiées alors $k = 1$. Là en particulier, la restriction aux types de scindage consécutifs se révèle décisive.

Au cours de la démonstration on est amené à étudier certains fibrés uniformes de types de scindage particuliers (par ex. : $k = 2$, $r_1 = 1$ voir plus haut, cf. aussi V;2.2, V;5.2.2). Cette étude dont les résultats sont regroupés en IV, s'est étendue au-delà des besoins strictement nécessaires à d'autres types de scindage et non seulement au rang $(n + 1)$. Par exemple on montre (IV;1.1) :

PROPOSITION : Soit E un fibré uniforme de rang r sur $\mathbb{P}^n$ ($n \geq 3$) de type de scindage ($k = r$; $r_i = 1$; μ_i) alors : $E \cong \bigoplus_{i=1}^r \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_i)$.

SUR LES FIBRÉS UNIFORMES DE RANG $(n+1)$ SUR $\mathbb{P}^n$

Pour cela on utilise les méthodes géométriques standard mais en se ramenant, par restriction à des sous-ensembles judicieux, à des situations simples (IV;1.1;IV;2.2; IV;4.2).

En (VI), par des calculs explicites, on traite les petites valeurs de n ($n=3,4,5$) en montrant que $c=0$, se ramenant ainsi à la situation de (III).

•

Je voudrais exprimer toute ma reconnaissance à A.Hirschowitz, qui a su me guider tout au long de ce travail avec autant de générosité que de gentillesse.

•

Note ajoutée aux épreuves : Dans ([Ba-Ell]) en utilisant la méthode et les résultats de (II) on donne la classification des fibrés homogènes sur $\mathbb{P}^n$ ($n \geq 2$) de rang au plus $2n-1$.

CHAPITRE I

LE DIAGRAMME STANDARD

- § 1) La filtration HN^* pour les fibrés uniformes
- § 2) La variété F
- § 3) La relation ($\&$)
- § 4) Quelques propositions

§1. La filtration HN^* pour les fibrés uniformes

I - 1.1 : La filtration de Harder-Narasimhan sur $\mathbb{P}^1$.

Tout fibré E sur $\mathbb{P}^1$ est muni d'une filtration naturelle $HN^*(E)$.
 En effet soit $E \cong \bigoplus_{i=1}^k r_i \cdot \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(\mu_i)$, $\mu_1 > \dots > \mu_k$, alors le j -ème terme, $HN^j E$, de cette filtration est l'unique sous-fibré de E isomorphe à $\bigoplus_{i=1}^j r_i \cdot \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(\mu_i)$. Cette filtration n'est autre que celle de Harder-Narasimhan ([Ha-Na]).

I - 1.2 : La filtration de Harder-Narasimhan relative.

Soit $G(1,n)$ la grassmannienne des droites de $\mathbb{P}^n$ et F_n la variété d'incidence :
 $F_n := \{(x, d_\ell) \in \mathbb{P}^n \times G(1,n) / x \in \ell\}$, ℓ désigne une droite de $\mathbb{P}^n$ et d_ℓ le point correspondant de $G(1,n)$.

$p: F_n \rightarrow \mathbb{P}^n, q: F_n \rightarrow G(1,n)$ sont les projections. On obtient ainsi le diagramme "standard":

$$G(1,n) \xleftarrow{q} F_n \xrightarrow{p} \mathbb{P}^n.$$

Les fibres de p s'identifient à des espaces projectifs de dimension $(n-1)$ (cf. §2) et p induit un isomorphisme entre $q^{-1}(d_\ell)$ et ℓ . Par la suite, à moins d'une confusion possible, nous écrirons plus simplement G, F au lieu de $G(1,n), F_n$. Soit maintenant E un fibré uniforme sur $\mathbb{P}^n$. Pour chaque droite ℓ de $\mathbb{P}^n$, $E|_\ell$ est muni d'une filtration naturelle. Ces différentes filtrations s'organisent sur F en une filtration globale de p^*E , plus précisément :

I - 1.3 : PROPOSITION : Soit E un fibré uniforme sur $\mathbb{P}^n$ de type de scindage

$(k; r_1 \dots r_k ; \mu_1 \dots \mu_k)$ alors on associe à E , de façon naturelle, des fibrés E_i de rang r_i sur G tels que p^*E admette une filtration, par des sous-fibrés, de gradué associé

$$\bigoplus_{i=1}^k [q^* E_i \otimes p^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_i)].$$

On notera $HN^j p^*E$ (ou même HN^j si aucune confusion n'est à craindre) le j -ème terme de la filtration, il est donné par :

$$HN^j p^*E := \text{Im}[q^* q_* p^* E(-\mu_j) \otimes p^* \mathcal{O}(\mu_j) \longrightarrow p^* E].$$

Pour plus de détails cf. ([E-H-S]).

SUR LES FIBRÉS UNIFORMES DE RANG $(n+1)$ SUR $\mathbb{P}^n$

§2. La variété F

I - 2.1 : Cohomologie entière de F.

On rappelle ici la description de la cohomologie de F donnée dans ([E-H-S]).

On a les fibrés tautologiques suivants :

- ω le sous-fibré tautologique de rang 2 sur G,
- N le fibré quotient tautologique de rang $(n-1)$ sur G,
- H le sous-fibré tautologique (de Hopf) de rang 1 sur $\mathbb{P}^n$
- Q le fibré quotient tautologique de rang n sur $\mathbb{P}^n$.

De façon naturelle F s'identifie à $\mathbb{P}(Q)$ et ceci détermine le fibré de Hopf relatif à Q noté H_Q .

On introduit les classes de Chern :

$U := c_1(p^*H)$, $V := c_1(H_Q)$ et on définit le polynôme :

$$R(X, Y) := X^n + \dots + X^k Y^{n-k} + \dots + Y^n.$$

On a alors :

I - 2.1.1 : PROPOSITION :

- (a) Le morphisme naturel, π , de $\mathbb{Z}[U, V]$ dans $H^*(F, \mathbb{Z})$ identifie $H^*(F, \mathbb{Z})$ à $\mathbb{Z}[U, V]/(R(U, V), U^{n+1})$.
- (b) La sous-algèbre $p^*H^*(\mathbb{P}^n, \mathbb{Z})$ est l'image par π de l'algèbre des polynômes indépendants de V.
- (c) La sous-algèbre $q^*H^*(G, \mathbb{Z})$ est l'image par π de l'algèbre des polynômes symétriques en U et V.

Démonstration : cf. ([E-H-S]).

Rappelons un autre résultat de ([E-H-S]) :

I - 2.2 : PROPOSITION : Le groupe de Picard de F est le groupe libre (commutatif) engendré par p^*H et H_Q .

I - 2.3 : Restriction de la filtration HN^* aux fibres de p.

Soit E un fibré uniforme sur $\mathbb{P}^n$ et $(HN^i)_{1 \leq i \leq k}$ les termes de la filtration de Harder-Narasimhan relative de p^*E . Cette filtration fournit les suites exactes :

$$0 \rightarrow HN^i \rightarrow HN^{i+1} \rightarrow q^*E_{i+1} \otimes p^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_{i+1}) \rightarrow 0, \quad 1 \leq i \leq k-1.$$

On rappelle que les fibres de p s'identifient de façon naturelle à des espaces projectifs de dimension $(n-1)$ ($p^{-1}(x) \cong \mathbb{P}(Q_x)$). On note $\mathcal{H}^i := HN^i|_{p^{-1}(x)}$ et $\mathcal{E}_i := q^*E_i|_{p^{-1}(x)}$.

Par restriction, on a les suites exactes : $0 \rightarrow \mathcal{H}^i \rightarrow \mathcal{H}^{i+1} \rightarrow \mathcal{E}_{i+1} \rightarrow 0, \quad 1 \leq i \leq k-1.$

Si $S(T,U,V) = T^r + T^{r-1} A_1(U+V) + \dots + T^{r-i} [A_i(U^i + V^i) + \dots] + \dots$ est le polynôme de Chern de $q^* E_{i+1}$ (cf. I;3.1) alors les classes de Chern de $\mathbb{E}_{i+1}$, considéré comme fibré sur $\mathbb{P}^{n-1} \cong p^{-1}(x)$, sont données par : $c_i = A_i$, $1 \leq i \leq n-1$. En effet $p^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(-1))$ est trivial sur les fibres de p et $H_{\mathbb{Q}}|_{p^{-1}(x)} \cong \mathcal{O}_{p^{-1}(x)}(-1)$. De plus, remarquons que $\mathcal{H}^k \cong \text{rg}(E) \cdot \mathcal{O}_{p^{-1}(x)}$ car $H\mathbb{N}^k \cong p^* E$. ■

I - 2.4 : "Sous-diagramme" standard induit par un plan.

Soit P un plan de $\mathbb{P}^n$ ($n \geq 3$) alors P induit un "sous-diagramme" du diagramme standard : $P^* \xleftarrow{q'} F_2 \xrightarrow{p'} P, (D_P)$, où : $F_2 := q'^{-1}(P^*)$, q' et p' sont les restrictions de q et p . F_2 s'identifie à $\mathbb{P}(Q_P)$ où Q_P désigne le fibré quotient tautologique de rang 2 sur P ; (D_P) est le diagramme standard pour P .

Sur F_2 nous avons les fibrés : $p'^*(H_P)$ et H_{Q_P} .

H_P est le sous-fibré tautologique de rang 1 sur P .

H_{Q_P} est le fibré de Hopf relatif à Q_P .

Soient : $\mathcal{U} := c_1(p'^* H_P)$, $\mathcal{V} := c_1(H_{Q_P})$ et i l'injection de F_2 dans F . Il est clair que : $i^*(p^* H) \cong p'^* H_P$ et $i^*(H_Q) \cong H_{Q_P}$. En particulier : $c_1(i^*(p^* H)) = i^*(c_1(p^* H))$ ce que l'on peut écrire : $\mathcal{U} = U|_{F_2}$, de même : $\mathcal{V} = V|_{F_2}$. En combinant avec (I;2.1.1) :

I - 2.4.1 : PROPOSITION : Le morphisme $H^*(F, Z) \rightarrow H^*(F_2, Z)$ induit par la restriction s'identifie au morphisme naturel :

$$Z[U, V] / (U^{n+1}, R_n(U, V)) \longrightarrow Z[U, V] / (U^3, R_2(U, V)) .$$

§3. La relation (&)

I - 3.1 : Polynôme de Chern.

A tout fibré topologique E , de rang r sur X on associe son polynôme de Chern : $\mathcal{C}_E(T) := T^r - c_1(E) T^{r-1} + \dots + (-1)^r c_r(E)$. On a alors les relations suivantes :

a) Si L est un fibré en droites sur X , alors :

$$\mathcal{C}_{E \otimes L}(T) = \mathcal{C}_E(T - c_1(L)) .$$

b) Si E est filtré de sorte que le gradué associé soit $\bigoplus_i E_i$,

$$\text{alors : } \mathcal{C}_E = \prod_i \mathcal{C}_{E_i} .$$

SUR LES FIBRÉS UNIFORMES DE RANG $(n+1)$ SUR $\mathbb{P}^n$

I - 3.2 : La relation (&)

Soit maintenant E un fibré uniforme de rang r sur $\mathbb{P}^n$.

Soit $P(T,U) = T^r + c_1 U T^{r-1} + c_2 U^2 T^{r-2} + \dots$ le polynôme de Chern de p^*E , où les c_i sont les classes de Chern de E , alors d'après (I;1.3) et (I;2.1.1) on a une relation dans $\mathbb{Z}[T,U,V]$:

$$(\&) \quad P(T,U) + Q(T,U,V) \cdot U^{n+1} + M(T,U,V) R(U,V) = \prod_{i=1}^k S_i(T + \mu_i U, U, V)$$

$Q(T,U,V)$ est un polynôme homogène de degré $r - n - 1$

$M(T,U,V)$ est un polynôme homogène de degré $r - n$

$S_i(T,U,V)$ est le polynôme de Chern de q^*E_i (il est donc homogène de degré r_i et symétrique en U et V).

§4. Quelques propositions

Dans les propositions suivantes, E désigne un fibré uniforme de rang r sur $\mathbb{P}^n$, de type de scindage $(k; r_1 \dots r_k; \mu_1 \dots \mu_k)$.

I - 4.1 : PROPOSITION : Supposons qu'il existe un indice j , $1 \leq j < k$, tel que

$\mu_{j+1} - \mu_j \leq -2$, alors E est extension de deux fibrés uniformes de rang $r_1 + \dots + r_j$ et $r_{j+1} + \dots + r_k$; (cf. [E-H-S]).

I - 4.2 : PROPOSITION : Si $k=1$, alors $E \cong r_1 \cdot \mathcal{O}_{\mathbb{P}^n}(\mu_1)$; (cf. [E-H-S]).

I - 4.3 : PROPOSITION : Si les premières classes de Chern des fibrés associés :

$c_1(E_1), \dots, c_1(E_k)$ sont nulles, alors E est somme directe de fibrés en droites; (cf. [E-H-S]).

I - 4.4 : PROPOSITION : E a un sous-fibré isomorphe Q si et seulement si p^*E a un sous-fibré isomorphe à H_Q . En particulier :

i) Si $r_1=1$ et $q^*(c_1(E_1)) = U+V$, alors E admet un sous-fibré isomorphe à $Q(\mu_1-1)$.

ii) Si $r_k=1$ et $q^*(c_1(E_k)) = -U-V$, alors E admet un quotient isomorphe à $Q^*(\mu_k+1)$ (cf. [E-H-S]).

I - 4.5 : PROPOSITION : Soit $\&$ un fibré de rang deux sur $G(1,n)$, $n \geq 3$, tel que pour tout x de $\mathbb{P}^n$, $q^* \&|_{\mathbb{P}^{-1}(x)}$ soit décomposable. Alors soit $\&$ est lui-même décomposable, soit $\& \cong \omega(h)$, $h \in \mathbb{Z}$ (cf. [Ba-VdV]).