MÉMOIRES DE LA S. M. F.

C. GÉRARD

Asymptotique des pôles de la matrice de scattering pour deux obstacles strictement convexes

Mémoires de la S. M. F. 2e série, tome 31 (1988)

<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1988_2_31__1_0>

Mémoire de la Société Mathématique de France, n° 31
Supplément au Bulletin de la S.M.F.
Tome 116, 1988, fascicule 1

ASYMPTOTIQUE DES PÔLES DE LA MATRICE DE SCATTERING POUR DEUX OBSTACLES STRICTEMENT CONVEXES

ABSTRACT : *We study the location of poles for the acoustic scattering matrix for two strictly convex obstacles. We obtain complete asymptotic expansions for the poles in a strip* $\mathrm{Im}\, z \leqq c$ *as* $\mathrm{Re}\, z$ *tends to infinity. These expansions are obtained using an approximation of the quantized billiard operator along the trapped ray between the two obstacles.*

RÉSUMÉ : *On étudie la position des pôles de la matrice de scattering acoustique pour deux obstacles strictement convexes. On obtient des développements asymptotiques complets pour les pôles dans une bande* $\mathrm{Im}\, z \leqq c$ *quand* $\mathrm{Re}\, z$ *tend vers l'infini. Ces développements sont obtenus grâce à une approximation de l'opérateur de billard quantifié le long du rayon capté entre les deux obstacles.*

Texte reçu le 30 janvier 1987.

C.GÉRARD, Université de Paris-Sud, Département de Mathématiques, 91405 Orsay, France.

TABLE DES MATIÈRES

1. INTRODUCTION ET RÉSULTATS 1

2. CONSTRUCTION DES OPÉRATEURS MICROLOCAUX 5

3. RÉSOLUTION DU PROBLÈME DE GRUSHIN POUR M_0... 15

4. RÉSOLUTION DU PROBLÈME DE GRUSHIN POUR M_1... 27

5. RÉSOLUTION DU PROBLÈME DE GRUSHIN POUR M.... 63

6. DÉMONSTRATION DU THÉORÈME PRINCIPAL 71

RÉFÉRENCES 95

APPENDICE 96

1. INTRODUCTION ET RÉSULTATS

On suppose que $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ où Ω_i est un obstacle strictement convexe dans $\mathbb{R}^{n+1}$ (n pair) à bord C^∞ Γ_i et $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$.

Soit d la distance de Ω_1 à Ω_2 et $a_i \in \Gamma_i$ les points tels que $|a_1 - a_2| = d$. On va utiliser la caractérisation suivante des pôles de la matrice de scattering pour Ω, $S(z)$ (voir [V]).

Pour $\lambda \in \mathbb{R}$ on considère la solution du problème suivant :

$$\text{(1.0)} \qquad \begin{cases} \Delta u + \lambda^2 u = f & \text{dans } \mathbb{R}^{n+1} \setminus \Omega \\ u\big|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

et u vérifie les conditions de radiation de Sommerfeld :

$$|u(r)| \leq C\, r^{-n/2}, \quad \left|\frac{\partial u}{\partial r} + i\lambda u\right| \leq C\, r^{-(n+1)/2} .$$

Soit d'autre part $\psi(x)$ une fonction C^∞ positive telle que $|D_x^\alpha \psi| \leq C_\alpha\, e^{-|x|^2}$, et W_ψ^2 l'espace de Sobolev à poids défini par $|u|^2_{W^2_\psi} = |\psi u|_{W^2(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \Omega)}$ où W^s est l'espace de Sobolev classique.

On note d'autre part $L^2_a(\mathbb{R}^{n+1})$ l'espace L^2 usuel à support dans $\{|x| \leqq a\}$ avec a assez grand pour que $\Omega \subset \{|x| \leqq a\}$.

Alors il est montré dans [V] que la résolvante du problème (1.0) définie pour $\lambda \in \mathbb{R}$, a un prolongement méromorphe avec des résidus de rang fini aux poles, si on la considère comme opérateur de $L^2_a(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \Omega)$ dans W^2_ψ.

Cette résolvante notée $S(\lambda)$ est d'autre part holomorphe dans $\operatorname{Im} \lambda < 0$, et ses pôles sont exactement avec multiplicité les pôles de la matrice de scattering pour Ω. Une deuxième caractérisation des pôles est donnée dans la section 6.

Enonçons maintenant le théorème démontré dans cet article.

Le rayon $[a_1, a_2]$ est l'unique rayon captif de Ω. Il correspond au point fixe $(a_1, 0) \in T^*(\Gamma_1)$ pour l'application du billard χ associée aux rayons réfléchis.

Ce point fixe est de type hyperbolique car Γ_1 et Γ_2 sont strictement convexes, et on note $\nu_1, \dots, \nu_n \in \mathbb{R}^n$ les valeurs propres plus grandes que 1 de $D\chi(a_1, 0)$, et $b_o = (\nu_1 \dots \nu_n)^{-1/2}$.

Pour $\alpha \in \mathbb{N}$, on pose $K_\alpha = b_o \nu^{-\alpha}$. (On peut avoir $K_\alpha = K_{\alpha'}$ pour $\alpha \neq \alpha'$). On note alors $\lambda^\alpha_j = -i \log \frac{K_\alpha}{2d} + j \frac{\Pi}{d}$, $j \in \mathbb{Z}$, qui sont disposés sur des lignes $\operatorname{Im} z = \text{cste}$ et appellés pseudopôles par [B.G.R]. Pour chaque valeur de K_α, on introduit alors des développements asymptotiques : (on omet l'indice α pour simplifier les notations)

$$\lambda_\ell(j) = \lambda_j + \sum_{k=1}^{\infty} a_{k,\ell}(\lambda_j)^{-k/2a\ell} \quad \text{avec} \quad a\ell \in \mathbb{N} \quad \ell = 1,\dots a$$

qui correspondent à des développements asymptotiques pour les valeurs propres d'une $N \times N$ matrice où $N = \operatorname{Card}\{\alpha' \mid K_{\alpha'} = K_\alpha\}$.

On note p_ℓ la multiplicité de $\lambda_\ell(j)$ comme valeur propre asymptotique. On démontre alors le théorème suivant:

<u>*Théorème*</u> *: Pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe $j_N \in \mathbb{N}$ et $c_N \in \mathbb{R}$ tels que pour $j \geq j_N$ la matrice de scattering pour Ω a exactement p_ℓ pôles avec multiplicité dans :*

$$|\lambda - \lambda_j - \sum_{k=1}^{m_N} a_{k,\ell}(\lambda_j)^{-k/2a\ell}| \leq c_N \, |\lambda_j|^{-N}$$

où m_N est le plus grand k tel que $\frac{k}{2a\ell} < N$.

De plus dans le cas où les $|\alpha'|$ ont tous la même parité pour $\alpha' \in \{\alpha' \mid K_{\alpha'} = K_\alpha\}$, le développement asymptotique ne contient que des puissances $\lambda_j^{-k/a\ell}$ et plus de $\frac{1}{2}$ puissances. Le premier résultat dans cette direction est dû à M. Ikawa ([I_1]) qui a démontré ce théorème pour la première rangée de pôles $(\alpha = 0)$ avec un développement asymptotique à l'ordre $O(\lambda_j)^{-1/2}$ et récemment ([I_2]) avec un développement complet.

On donne maintenant le plan de l'article.

On va réduire la recherche de pôles à un problème sur le bord d'un des ouverts, par exemple Γ_1. Pour cela, on introduit les opérateurs suivants : $H_{i,+}(\lambda) : C^\infty(\Gamma_i) \to C^\infty(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \Omega_i)$ est la résolvante du problème :

$$(1.i) \qquad \begin{aligned} &(\Delta+\lambda^2)H_{i,+}(\lambda)v=0 \quad \text{dans} \quad \mathbb{R}^{n+1} \setminus \Omega_i \\ &H_{i,+}(\lambda)v\big|\Gamma_i=v \end{aligned}$$

étendue comme $S(\lambda)$ de $W^{3/2}(\Gamma_i)$ dans W^2_ψ (voir [V]). $H_{i,+}$ est définie pour $i = 1,2$ pour λ dans une région $\{|\mathrm{Im}\,\lambda| \leqq c_0, \mathrm{Re}\,\lambda \geqq c_1\}$ pour c_1 assez grand, car d'après les résultats de $[M_2]$, la matrice de scattering pour un obstacle non captif n'a pas de pôles dans $\{\mathrm{Im}\,\lambda \geqq a \log|\lambda|+b\}$. On note alors $H_i(\lambda)v = H_{i,+}(\lambda)v\big|_{\Gamma_{i+1}}$ où $\Gamma_3 = \Gamma_1$ et $M(\lambda) = H_2(\lambda)\, H_1(\lambda)$.

Dans la section 2, on construit une approximation asymptotique $H(\lambda)$ de $M(\lambda)$ près du point $(a_1,0)$ de $T^*(\Gamma_1)$, qui est un opérateur intégral de Fourier à grand paramètre λ associé à la transformation canonique du billard.

Dans la section 3 et 4 on étudie H en se plaçant dans des coordonnées symplectiques convenables, et en remplaçant H par une approximation H_0. On peut résoudre un problème de Grushin pour $\mathbb{1} - H_0$, puis pour $\mathbb{1} - H$ par perturbation.

Dans la section 5, on résout un problème de Grushin pour $1\!\!1 - M(\lambda)$ en utilisant des résultats sur la propagation des singularités en dehors d'un voisinage du rayon périodique $[a_1, a_2]$.

Dans la section 6, on démontre le théorème sur les pôles de $S(z)$.

On a rassemblé dans l'appendice les résultats techniques nécessaires dans les démonstrations.

Enfin nous tenons particulièrement à remercier J. Sjöstrand qui est à l'origine de ce travail pour ses nombreuses suggestions qui ont permis d'améliorer une première version du manuscrit rédigée à l'Institut Mittag-Leffler au printemps 85.

2. CONSTRUCTION DES OPÉRATEURS MICROLOCAUX

On commence par introduire des opérateurs de troncature.

Soient $k_1(x,y,\xi)$, $k_1'(x,y,\xi) \in S^{o,o}_{o,o}(\Gamma_1 \times \Gamma_1)$, $k_2(x,y,\xi) \in S^{o,o}_{o,o}(\Gamma_2 \times \Gamma_2)$, tous à support compact, (voir appendice A.I pour les classes $S^{o,o}_{o,o}(\Gamma_1 \times \Gamma_1)$) avec k_1, k_1' égaux à 1 près de $(a_1, a_1, 0)$ et k_2 égal à 1 près de $(a_2, a_2, 0)$. Dans la suite, on posera $a_1 = 0$.

On suppose de plus que $k_2 = 1$ sur l'intersection avec $\partial T^*(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \Omega_2)$ des rayons sortants de $\operatorname{supp} k_1$, et que k_1' vérifie la même propriété avec k_1 remplacé par k_2.

On aura besoin dans la suite de réduire un nombre fini de fois les supports de k_1, k_2, k_1' , en gardant ces propriétés.

On pose alors :

$$K_1\, u(x,\lambda) = \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^n \int e^{-i\lambda(x-y)\cdot\xi}\, k_1(x,y,\xi)\, u(y,\lambda)\, dy\, d\xi \ .$$

K_2 et K_1' sont définis de manière analogue.

K_1 envoie $C^\infty(\Gamma_1)$ dans $C^\infty(\Gamma_1)$ pour $\lambda \in D$ où D est un domaine de $\mathbb{C}$ de la forme $\{|\mathrm{Im}\,\lambda| \leqq c_0 \text{ , } \mathrm{Re}\,\lambda \geqq c_1\}$.

Soit $V_1 \subset T^*(\Gamma_1)$ le support de $K_1(y,\theta)$, et soit K l'intersection du flot des 1/2 rayons sortants de V_1 avec un voisinage U_1 de $\overline{\Omega}_1$ qui contient Γ_2 .

Dans ce paragraphe, on va construire un opérateur $\tilde{H}_1 : \underset{\sim}{C}^\infty(\Gamma_1) \to \underset{\sim}{C}^\infty(K)$ tel que :

$$(2.1) \qquad \begin{cases} (\Delta+\lambda^2)\tilde{H}_1 u = R_1 u \\ \tilde{H}_1 u\big|_{\Gamma_1} = K_1 u \end{cases}$$

où K_1 est l'opérateur de troncature introduit plus haut et R_1 a un noyau dans $\underset{\sim}{C}^\infty(K \times \Gamma_1)$.

On a déjà construit un tel opérateur si U_1 est assez petit dans la Proposition A.II.3. Il reste à étendre cette construction au voisinage de Ω_2 .

<u>*Proposition 2.1*</u> *: Il existe un opérateur* $\tilde{H}_1 : \underset{\sim}{C}^\infty(\Gamma_1) \to \underset{\sim}{C}^\infty(K)$ *qui vérifie (2.1).* $\tilde{H}_1$ *est de la forme :*

$$\tilde{H}_1 u(x,\lambda) = \left(\frac{\lambda}{2\pi}\right)^n \int e^{-i\lambda(\psi(x,\theta)-y\cdot\theta)} a(x,y,\theta,\lambda)\, u(y,\lambda)\,dy\,d\theta$$

où a est holomorphe en λ pour $\lambda \in D$,

$$a \in S^{o,o}_{o,o}(K \times \Gamma_1)\ .$$

<u>Démonstration</u> : Il suffit de voir qu'on peut étendre les constructions de la Proposition A.II.3. On étend ψ à K par :

(2.2) $\psi(x+\ell\nabla\psi(x,\theta),\theta) = \psi(x,\theta)+\ell$. L'extension est bien C^∞ car Γ_1 est strictement convexe.

On peut ensuite étendre a solution de (A.II.8) à K en utilisant que (A.II.8) est une équation différentielle ordinaire le long des rayons qui recouvrent K. On a donc démontré la proposition. □

<u>Proposition 2.2</u> : Soit $V_2 = K \cap \Gamma_2$.
On a : $(H_1 \circ K_1 - \tilde{H}_1)\big|_{V_2}$ a un noyau dans $\underset{\sim}{C}^\infty(V_2 \times \Gamma_1)$.

<u>Démonstration</u> : D'après l'appendice, il suffit de montrer que si U_2 est un voisinage de V_2 dans $\mathbb{R}^{n+1} \setminus \Omega_1$ $(H_1 \circ K_1 - \tilde{H}_1)\big|_{U_2}$ a un noyau dans $\underset{\sim}{C}^\infty(U_2 \times \Gamma_1)$.

En utilisant les arguments de la preuve du th. A.II.12, on voit que l'on peut prendre par exemple $U_2 = K$, et terminer la démonstration de la même façon. □

On peut faire la même construction en échangeant les rôles de Γ_1 et Γ_2 et construire un opérateur :