JEAN-YVES LE DIMET

Cobordisme d’enlacements de disques

Mémoires de la S. M. F. 2e série, tome 32 (1988)

<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1988_2_32__1_0>

Mémoire de la Société Mathématique de France, n° 32
Supplément au Bulletin de la S.M.F.
Tome 116, 1988, fascicule 2

COBORDISME D'ENLACEMENTS DE DISQUES

par Jean-Yves LE DIMET

Résumé. Un enlacement de k disques de dimension n , ou (n,k) enlacement, est un plongement de k exemplaires du disque de dimension n dans le disque de dimension n+2 .Deux (n,k) enlacements se composent par empilement. Si bien que l'ensemble des classes de cobordisme des (n,k) enlacements est doté d'une structure de groupe. Ce groupe est noté $C_{n,k}$. Dans une première partie nous construisons des invariants pour $C_{1,k}$. Il se trouve que $C_{1,k}$ n'est pas commutatif pour k>2 ,mais $C_{1,1}$ est isomorphe au groupe de cobordisme des noeuds classiques . Le reste du travail est consacré à l'étude des enlacements en grandes dimensions . Une longue suite exacte relie les groupes $C_{n,k}$ à des groupes de chirurgie homologique.

COBORDISM OF LINKED DISCS

Abstract. A (n, k) link (of discs) is a p.l. locally flat embedding of k copies of the disc D^n in the disc D^{n+2}. Two (n, k) links are composed by stacking. Thus, the set $C_{n,k}$ of cobordism classes of (n,k) links inherits a natural group stucture. In the first part of this work we construct two invariants for $C_{1,k}$. $C_{1,k}$ is not commutative when k>2, but $C_{1,1}$ is isomorphic to the classical knot cobordism group. The rest of this work is devoted to higher dimensional links. The groups $C_{n,k}$ are related to homology surgery groups in a long exact sequence.

Texte reçu le 11 février 1987.

Jean-Yves LE DIMET, Département de Mathématiques et d'Informatique, Université de Nantes , 2 rue de la Houssinière . 44072 Nantes cedex 03

SOMMAIRE

INTRODUCTION

Il existe plusieurs façons d'évaluer les groupes C_n de cobordisme de noeuds introduits par M. KERVAIRE dans [K].

L'une d'elle pourrait consister à remarquer les faits suivants. Un noeud de dimension , $f : S^n \longrightarrow S^{n+2}$ et de complémentaire X donne lieu à une application $\overline{f} : (X, \partial X) \longrightarrow (D^{n+1} \times S^1, S^n \times S^1)$ qui est un homéomorphisme sur le bord et induit un isomorphisme en homologie entière ; une telle application est un Z-lissage de la variété $X_0^{n+2} = D^{n+1} \times S^1$ qui est le complémentaire du noeud trivial. Réciproquement à un Z-lissage $\overline{g} : (V, \partial V) \longrightarrow (D^{n+1} \times S^1, S^n \times S^1)$, $n \geqslant 3$, nous pouvons associer - du moins dans la catégorie semi-linéaire - un noeud $g : S^n \times 0 \rightarrow V \cup_{\partial V} S^n \times D^2$ bien défini à cobordisme près.

Nous obtenons ainsi un isomorphisme de groupe entre C_n et le groupe $\mathcal{S}_Z(X_0^{n+2})$ des classes d'équivalence des Z-lissages de X_0^{n+2}.

Enfin, un calcul simple montre que, pour $n \geqslant 4$, $\mathcal{S}_Z(X_0^{n+2})$ est isomorphe au groupe de chirurgie homologique $\Gamma_{n+3}(\Delta)$ où Δ est le diagramme ci-dessous (ε étant le morphisme d'augmentation) :

$$\begin{tikzcd} \mathbb{Z}[t,t^{-1}] \arrow[r, "\mathrm{id}"] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] & \mathbb{Z}[t,t^{-1}] \arrow[d, "\varepsilon"] \\ \mathbb{Z}[t,t^{-1}] \arrow[r, "\mathrm{id}"] & \mathbb{Z} \end{tikzcd}$$

Il semble naturel de vouloir généraliser le raisonnement qui précède aux entrelacs de dimension n à k composantes, $f : \coprod_k S^n \longrightarrow S^{n+2}$. Malheureusement si les complémentaires de tels entrelacs ont bien tous même homologie que le complémentaire de l'entrelacs trivial $X_0^{n+2}(k)$, il n'est pas possible, en général, d'associer à un entrelacs f un Z-lissage $\overline{f}$ de l'entrelacs trivial.

En fait, S.E. CAPPELL et J.L. SHANESON ont remarqué qu'un tel $\overline{f}$ existait si et seulement si f était un entrelacs bord. Rappelons qu'un entrelacs est un entrelacs bord si les composantes de cet entrelacs bordent dans S^{n+2} des surfaces de SEIFERT disjointes. Cette remarque est à la base du calcul, en terme de groupes de chirurgie homologique, de l'ensemble des classes de cobordisme des entrelacs bords, voir [CS_2].

Dans le but d'obtenir un modèle homologique pour les complémentaires et aussi une structure naturelle de groupe sur l'ensemble des classes de cobordisme, nous avons été conduits , au lieu des entrelacs de sphères, à considérer les plongements $f : \coprod_k D^n \longrightarrow D^{n+2}$ triviaux sur le bord. De tels plongements sont appelés, dans la suite, <u>enlacements de k disques de dimension n,</u> ou (n,k) enlacements.

Remplacer les sphères S^n par des disques D^n présente deux avantages :

1- Deux (n,k) enlacements peuvent se composer par "empilement", si bien que l'ensemble $C_{n,k}$ des classes de cobordisme des (n,k) enlacements est un groupe pour cette loi de composition. Rappelons, à ce propos, que la somme connexe de deux entrelacs n'est pas bien définie, même à cobordisme près ; voir [H] page 126.

2- Soit X le complémentaire d'un (n,k)-enlacement f ; alors $\partial X = \#_k S^n \times S^1$ et il existe une inclusion canonique du bouquet de k cercles $V_k S^1$ dans ∂X.

Maintenant, il est facile de voir que la composition des inclusions $V_k S^1 \hookrightarrow \partial X \hookrightarrow X$ induit un isomorphisme en homologie entière. Par conséquent X et $V_k S^1$ ont même <u>localisé</u> au sens de BOUSFIELD, voir [B_1], [B_2]. Rappelons que le foncteur E de localisation a les propriétés suivantes :

a) $X \longrightarrow E(X)$ induit un isomorphisme en homologie entière et

b) Si $g : Y \longrightarrow Z$ induit un isomorphisme en homologie entière, l'application $g^* : [Z, E(X)] \longrightarrow [Y, E(X)]$ est une bijection.

Par conséquent, nous pouvons associer à tout enlacement f une application $\overline{f} : X \longrightarrow E(V_k S^1)$ qui induit un isomorphisme en homologie entière. Mais si nous voulons mettre en oeuvre pour les enlacements le plan esquissé pour les noeuds, nous nous heurtons à un obstacle : le complexe $E(V_k S^1)$ présente le grave inconvénient de ne pas être un complexe fini.

En fait, il existe une théorie de localisation dûe à P. VOGEL, voir $[V_1]$, pour laquelle le foncteur de localisation, noté encore E, possède les propriétés suivantes :

c) Si X est un complexe fini, E(X) est limite inductive de sous complexes finis K_p.

d) $X = K_0$ et pour tout entier p, l'inclusion $K_p \hookrightarrow K_{p+1}$ induit un isomorphisme en homologie entière.

C'est ce foncteur E que nous utiliserons dans la suite. Plus précisément, si $(K_p)_{p \geq 0}$ désigne la filtration de $E(V_k S^1)$ décrite ci-dessus, il est possible d'adjoindre à tout K_p un bord ∂K_p^{n+1} homéomorphe à $\#_k S^n \times S^1$ de sorte que $(K_p, \partial K_p^{n+1})$ soit un Z-complexe de Poincaré de dimension n+2. Ceci nous permet de construire un morphisme de groupe $b : \mathcal{S}_{n+2} \longrightarrow C_{n,k}$ où $\mathcal{S}_{n+2} = \varinjlim_p \mathcal{S}_Z(K_p)$

Dans le chapitre II nous montrons que $\mathcal{S}_{n+2}$ est isomorphe à un groupe de chirurgie homologique et que b fait partie d'une longue suite exacte (S) :

$$(n>3) \qquad \ldots \longrightarrow \mathcal{A}_{n+2} \xrightarrow{a} \mathcal{S}_{n+2} \xrightarrow{b} C_{n,k} \xrightarrow{\partial} \mathcal{A}_{n+1} \longrightarrow \ldots$$

Dans ce même chapitre, le groupe $\mathcal{A}_{n+1}$ est calculé en fonction des groupes d'homotopie du localisé E_k de $V_k S^1$.

La définition précise des enlacements et la structure de groupe de $C_{n,k}$ sont mis en place dans le chapitre I. En fait $C_{n,k}$ est un groupe abélien pour $n \geqslant 2$. Le reste du chapitre est consacré à l'étude de $C_{1,k}$. Deux invariants pour $C_{1,k}$ sont construits, des exemples sont donnés. En particulier nous montrons comment associer à tout élément de $C_{1,k}$ k séries formelles en k variables non commutatives. Etant donné la complexité des calculs, nous avons dû nous aider d'un ordinateur pour traiter les exemples.

Au chapitre III nous étudions le groupe $B_{n,k}$ des classes de cobordisme des enlacement bords. Puis dans ce même chapitre nous montrons que l'ensemble des classes de cobordisme des entrelacs est le quotient de $C_{n,k}$ sous l'action d'un groupe d'automorphismes de $\pi_1(E_k)$.

CHAPITRE 0

PRÉLIMINAIRES

Les deux ingrédients principaux de ce travail sont :

1°) La localisation des espaces.

2°) La chirurgie homologique.

Nous avons besoin d'une théorie de localisation plus précise que celle qui a été étudiée par A.K. Bousfield dans [B_1], [B_2]. Ce travail - malheureusement non publié - a été fait par P. Vogel dans [V_1]. Dans le §1 ci-dessous, nous exposons les résultats de [V_1] qui nous sont nécessaires. Les démonstrations se trouvent dans l'Annexe.

La chirurgie homologique a été développée par S.E. Cappell et J.L. Shaneson dans [CS_1] et utilisée, en particulier, pour le calcul des groupes de cobordisme des entrelacs bords dans [CS_2]. Nous avons cru bon de résumer dans le §2 les résultats principaux de cette théorie.

§1- LOCALISATION

Notre but est de construire un foncteur de localisation $E : CW_\bullet \longrightarrow CW_\bullet$, $CW_\bullet$ désignant la catégorie des CW -complexes pointés et des classes d'homotopie d'applications continues, tel que, si X est un complexe fini, E(X) soit limite inductive de sous-complexes finis ayant tous même homologie que X donc que E(X). De plus, pour des raisons qui deviendront évidentes dans la suite, nous avons besoin que la flèche de localisation $X \longrightarrow E(X)$ induise un morphisme normalement surjectif $\pi_1(X) \longrightarrow \pi_1(E(X))$.

Rappelons que les démonstrations se trouvent dans l'Annexe.

1.1 DÉFINITION. $\mathcal{W}$ est la classe des paires (K,L) de complexes finis pointés tels que K/L soit contractile.

Malheureusement la classe $\mathcal{W}$ n'est pas assez grande pour y développer une théorie de localisation, c'est pourquoi nous étendons $\mathcal{W}$ à $\mathcal{W}^*$ comme suit :

1.2 DÉFINITION. Une paire (X,A) de complexes pointés est dans $\mathcal{W}^*$ si toute application continue pointée $(M,N) \longrightarrow (X,A)$, où (M,N) est une paire de complexes finis, se factorise à travers un élément (K,L) de $\mathcal{W}$.

1.3 REMARQUES.

1- En raison du théorème de Whitehead, dire que X/A est contractile est équivalent à :

a) $A \hookrightarrow X$ induit un isomorphisme en homologie entière et