MÉMOIRES DE LA S. M. F.

FRANÇOISE DELON

# Idéaux et types sur les corps séparablement clos

*Mémoires de la S. M. F. 2e série*, tome 33 (1988)
<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1988_2_33__1_0>

© Mémoires de la S. M. F., 1988, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mémoires de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Memoires/Presentation.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
*Article numérisé dans le cadre du programme*
*Numérisation de documents anciens mathématiques*
http://www.numdam.org/

*Mémoire de la Société Mathématique de France, n° 33*
*Supplément au Bulletin de la S.M.F.*
*Tome 116, 1988, fascicule 3*

# IDÉAUX ET TYPES SUR LES CORPS SÉPARABLEMENT CLOS

Françoise Delon

On sait que la théorie des corps algébriquement séparablement clos de caractéristique et de degré d'imperfection fixés est complète et stable. Nous décrivons les types en termes d'idéaux de polynômes à une infinité de variables. Cela permet de déterminer le générique, de décrire la déviation et quelques rangs naturels, de montrer qu'il y a propriété de l'ordre dimensionnel, qu'il n'y a pas propriété du recouvrement fini, et que, dans le cas d'un degré d'imperfection fini, l'adjonction au langage d'un nombre fini de constantes permet l'élimination des imaginaires.

It is known that the theory of separably closed fields of fixed characteristic and degree of imperfection is complete and stable. We describe the types in terms of ideals of polynomial rings in infinitely many variables. This allows us to determine the generic type, to describe forking and to give natural notions of rank, to show that d.o.p. holds, and not f.c.p., and that, in the case of a finite degree of imperfection, the expansion of the language via finitely many constants admits elimination of imaginaries.

---

Texte reçu le 12 février 1986, révisé le 8 juillet 1987.

Françoise DELON, Université Paris VII, UA CNRS 753, Tour 45-55, 5ème étage,
2 place Jussieu, 75251 Paris Cedex 05, France.

TABLE DES MATIÈRES


| | Page |
|---|---|
| Rappels algébriques | 3 |
| Notations | 7 |
| I. Idéaux séparables | 8 |
| 1. Définitions et propriétés générales | 8 |
| 2. Traduction au premier ordre lorsque $C = K[\bar{X}]$ | 10 |
| 3. Conditions de chaînes | 16 |
| II. Théories complètes de corps séparablement clos | 23 |
| III. Types dans le cas d'un degré d'imperfection fini | 26 |
| 1. Description des types | 26 |
| 2. Déviation | 31 |
| 3. Le générique | 33 |
| 4. Elimination des imaginaires | 36 |
| 5. Quelques rangs | 39 |
| 6. Les paires et l'absence de p. r. f. | 46 |
| 7. La d. o. p. | 55 |
| IV. Degré d'imperfection infini | 61 |
| V. Retour sur les idéaux | 72 |

## RAPPELS

Cet article manipule beaucoup de notions algébriques, nous avons rassemblé ci-dessous l'essentiel des résultats et définitions non triviaux qui seront utilisés. On trouvera des exposés détaillés sur la disjonction linéaire ou algébrique ("freeness" dans [Lang]) et les extensions régulières dans [Lang], sur la séparabilité et les p-bases dans [Bour].

Soit des corps $K \subset L$ , $M \subset N$ ; $L$ et $M$ sont <u>linéairement disjoints</u> au-dessus de $K$ lorsqu'ils satisfont une des propriétés équivalentes :

- des éléments de $L$ linéairement indépendants sur $K$ le restent sur $M$
- des éléments de $M$ linéairement indépendants sur $K$ le restent sur $L$
- l'anneau $L[M]$ est $K$-isomorphe au produit tensoriel $L \otimes_K M$ par l'homomorphisme canonique.

Pour des corps $K \subset L \subset M$ et $K \subset N$ , sont équivalents :

- $M$ et $N$ sont linéairement disjoints au-dessus de $K$
- $L$ et $N$ sont linéairement disjoints au-dessus de $K$ , et $M$ et $LN$ sont linéairement disjoints au-dessus de $L$ .

Soit des corps $K \subset L$ , $K \subset M$ ; $L$ et $M$ sont <u>algébriquement disjoints</u> sur $K$ lorsque des éléments de $L$ qui sont algébriquement indépendants sur $K$ le restent sur $M$ , ou, ce qui est équivalent, lorsque des éléments de $M$ algébriquement indépendants sur $K$ le restent sur $L$ .

La disjonction linéaire implique la disjonction algébrique. Réciproquement soit $K \subset L \subset N$ et $m_1,\ldots m_n$ des éléments de $N$ algébriquement indépendants sur $L$ ; alors les corps $L$ et $K(m_1,\ldots m_n)$ sont linéairement disjoints sur $K$ .

Disjonctions linéaire et algébrique sont des propriétés de type fini : $L$ et $M$ sont disjoints au-dessus de $K$ ssi, pour chaque sous-corps $L'$

(respectivement $M'$ ) de $L$ (respectivement $M$ ) finiment engendré sur $K$ , $L'$ et $M'$ sont disjoints sur $K$ .

Soit un corps $K$ de caractéristique $p$ , $A \subset K$ et $x \in K$ ; $x$ est dit p-<u>indépendant</u> dans $K$ au-dessus de $A$ lorsque $x \notin K^p(A)$ ; une partie $B$ de $K$ est dite p-<u>libre</u> sur $A$ , ou ses éléments p-<u>indépendants</u> sur $A$ , lorsque, $\forall b \in B$ , $b$ est p-indépendant sur $A \cup (B - \{b\})$ . Appelons $p^n$-<u>monômes</u> associés à $\{b_i \; ; \; i < i_o\}$ les monômes en les $b_i$ d'exposant par rapport à chaque $b_i$ strictement inférieur à $p^n$ . Des éléments $b_1, \ldots b_n$ sont p-indépendants sur $A$ dans $K$ ssi les p-monômes $\{ \prod_{i=1}^{n} b_i^{j(i)} \; ; \; j \in \{0,1,\ldots p-1\}^n \}$ sont linéairement indépendants sur $K^p(A)$ . On dira "p-indépendant" pour "p-indépendant sur $\emptyset$" , de même pour p-libre. Une partie $A$ est dite p-<u>génératrice</u> de $K$ lorsque $K \subset K^p(A)$ . Une partie est p-génératrice minimale ssi elle est p-libre maximale, et elle est alors appelée p-<u>base</u>. Si $B$ est une p-base de $K$ , avec $m_i$ les p-monômes associés, un élément $x$ de $K$ s'écrit de façon unique $x = \Sigma\, x_i^p m_i$ avec $x_i \in K$ ; les $x_i$ sont les <u>composantes</u> de $x$ sur $B$ . Plus généralement, si les $m_i$ sont les $p^n$-monômes associés à $B$ , $x$ s'écrit $x = \Sigma\, x_i^{p^n} m_i$ pour des uniques $x_i \in K$ ; on appellera ces $x_i$ les <u>composantes de profondeur</u> $n$ de $x$ sur $B$ . Remarquons la chose suivante:

O. Les produits $m_i m_j^p$ où $m_i$ est un un p-monôme et $m_j$ un $p^n$-monôme, sont des $p^{n+1}$-monômes, et chaque $p^{n+1}$-monôme admet une unique décomposition de ce type.

Toutes les p-bases de $K$ ont le même cardinal. Si ce cardinal est fini, on l'appelle <u>degré d'imperfection</u> (ou, dans un contexte de théorie des modèles, <u>invariant de Eršov</u>) de $K$ ; sinon on dit que le degré d'imperfection est infini. Si $K$ est de degré d'imperfection fini $e$ , on a $[K : K^p] = p^e$ .

On connaît la notion d'extension algébrique séparable. Nous appellerons <u>séparablement clos</u> un corps sans extension algébrique séparable propre. On sait qu'un corps $K$ admet une clôture algébrique séparable qui est unique à

K-automorphisme près; on la notera $K^s$ .

La notion de séparabilité s'étend à des extensions arbitraires: une extension $K \subset L$ de corps est dite <u>séparable</u> lorsqu'elle satisfait une des propriétés équivalentes:

- $K^{p^{-1}}$ et $L$ sont linéairement disjoints sur $K$
- $K^{p^{-\infty}} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} K^{p^n}$ et $L$ sont linéairement disjoints sur $K$
- toute partie p-libre de $K$ reste p-libre dans $L$ .

Une propriété importante des extensions algébriques séparables finies est d'être monogène ; cela se généralise de la façon suivante: si $K \subset K(x_1,\ldots x_n)$ est une extension séparable, alors $L$ admet une <u>base de transcendance séparante</u> extraite des $x_i$ , c'est-à-dire qu'il y a des $x_{i_1},\ldots x_{i_r}$ tels que l'extension $K(x_{i_1},\ldots x_{i_r}) \subset L$ soit algébrique séparable. Il y a transitivité de la séparabilité, et enfin, si l'extension $K \subset L$ est séparable et que $M$ est une extension algébrique de $K$ avec $K \subset M \subset L$ , alors $L$ reste séparable sur $M$ .

Ainsi, dans une extension séparable, le degré d'imperfection ne peut qu'augmenter, il est conservé dans une extension algébrique séparable, et ne peut que diminuer dans une extension purement inséparable. En particulier, une partie p-libre sur $K$ est nécessairement algébriquement libre sur $K$ .

Une extension de corps $K \subset L$ est dite <u>régulière</u> lorsqu'elle est séparable et que $K$ est relativement algébriquement clos dans $L$ . L'extension $K \subset L$ est régulière ssi $L$ est linéairement disjoint sur $K$ de toute extension algébrique de $K$ , ssi il l'est de la clôture algébrique de $K$ . Enfin, si $L$ et $M$ sont linéairement disjoints sur $K$ et que l'extension $K \subset L$ est régulière, alors l'extension $M \subset LM$ est aussi régulière.

On a vu que disjonction linéaire implique disjonction algébrique et indiqué un cas où la réciproque est vraie. Plus généralement, si $L$ est une extension régulière de $K$ , alors $L$ et $M$ sont linéairement disjoints sur $K$ dès qu'ils sont algébriquement disjoints (ce résultat est dans [Lang], deux cas particuliers sont exposés dans [R]). On utilisera systématiquement ce résultat pour $K$

séparablement clos et des extensions $L$ et $M$ séparables, de même que le fait suivant: avec les mêmes hypothèses, $L$ et $M$ sont linéairement disjoints sur $K$ ssi $L^s$ et $M^s$ le sont.

## NOTATIONS

. Pour un anneau intègre $A$ , $Q(A)$ est son corps de quotients ;

. pour un corps $K$ , $K^s$ est sa clôture algébrique séparable ;

. pour une extension de corps $K \subset L$ , $tr(L;K)$ est le degré de transcendance de $L$ sur $K$ ;

. pour un ordinal $\alpha$ et un entier $r$

$$(p^r)^\alpha = \{ \text{ applications de l'ensemble des ordinaux } < \alpha \text{ dans } \{0,1,\ldots p^r-1\} \} ;$$

si $\alpha$ est infini

$$^{<\omega}(p^r)^\alpha = \{ j \in (p^r)^\alpha ; j \text{ prend la valeur } 0 \text{ sauf sur un nombre fini de points } \}$$

$$(p^e)^{<\omega} = \{ \text{ suites finies à valeurs dans } \{0,1,\ldots p^e-1\} \} ;$$

. si $K$ et $L$ sont deux structures d'un même langage, $K < L$ et $K > L$ désignent l'inclusion élémentaire.

PARTIE 1

IDÉAUX SÉPARABLES

## 1. DÉFINITION ET PROPRIÉTÉS GÉNÉRALES

Dans cette partie on a choisi un corps $K$ de caractéristique $p > 0$ et une p-base $B = \{ b_i \ ; \ i < e \}$ de $K$ ; on note $m_j$ , $j \in {}^{<\omega}p^e$ les p-monômes associés. La p-indépendance sera toujours considérée par rapport à $K$ .

1. Définition. Soit une $K$-algèbre commutative unitaire $C$ ; un idéal $I$ de $C$ est dit séparable lorsqu'on a, pour tous $r \in \mathbb{N}$ , $j_1,\dots j_r$ distincts $\in p^e$ , et $x_1,\dots x_r \in C$

$$x_1^p m_{j_1} + \dots + x_r^p m_{j_r} \in I \implies x_1,\dots x_r \in I .$$

2. Lemme. Cette propriété est indépendante du choix de la p-base.

La preuve se fait sans difficulté. Ce lemme et le fait que toute famille p-libre se complète en une p-base, ont la conséquence suivante.

3. Corollaire. Un idéal $I$ est séparable ssi pour tous $r \in \mathbb{N}$ , $y_1,\dots y_r$ p-indépendants $\in K$ , on a

$$\sum_{j \in p^r} x_j^p \prod_i y_i^{j(i)} \in I \implies x_j \in I \ , \ \forall j \in p^r .$$

Remarquons qu'une intersection d'idéaux séparables reste séparable, et qu'on peut donc parler de l'idéal séparable $\mathrm{Sép}(A)$ engendré par une partie $A$ de

C . Le lemme suivant décrit cet idéal.

4. Lemme. Posons

$$\text{Sép}_1(A) = \{ x \in C \text{ ; il existe un entier } s \text{ , } j_1,\dots j_s \in {}^{<\omega}p^e \text{ non nuls partout, et } x_1,\dots x_s \in C \text{ tels que } x^p + \Sigma\, x_i^p m_{j_i} \in A \}$$

$$\text{Sép}_n(A) = \text{Sép}_1(\text{Sép}_{n-1}(A)) \text{ .}$$

Alors $\text{Sép}_n(A)$ est indépendant du choix de la p-base, est un idéal si A en est un, vérifie

$$\text{Sép}_n(A) = \{ x \in C \text{ ; il existe un entier } s \text{ ,. } j_1,\dots j_s \in {}^{<\omega}p^e$$

non nuls partout, et $x_{i,k} \in C$ pour $i = 1,\dots s$ et $k = 1,\dots n$ tels que

$$x^{p^n} + \sum_i x_{i,1}^{p^n} m_{j_i}^{p^{n-1}} + \dots + \sum_i x_{i,k}^{p^{n-k+1}} m_{j_i}^{p^{n-k}} + \dots + \sum_i x_{i,n-1}^{p} m_{j_i} \in A \}$$

et, pour un idéal I , on a:

$$\text{Sép}(I) = \cup\, \text{Sép}_n(I) \text{ .}$$

La démonstration se fait sans difficulté.

5. Lemme. Un idéal séparable est radiciel.

Démonstration. Si $a^m \in I$ , on a $a^{p^r} \in I$ dès que $p^r \geq m$ , donc $a \in I$ si I est séparable. □

6. Proposition. Soit $I = \bigcap_{\alpha<\alpha_o} P_\alpha$ , où les $P_\alpha$ sont des idéaux premiers de C , et où l'intersection est réduite, c'est-à-dire $I \not\subset \cap \{ P_\alpha \text{ ; } \alpha < \alpha_o \text{ , } \alpha \neq \alpha_1 \}$ pour tout $\alpha_1 < \alpha_o$ . Alors I est séparable ssi chaque $P_\alpha$ l'est.

Démonstration. Remarquons d'abord le fait suivant: si P est l'un quelconque des $P_\alpha$ , on a: $\forall q \in P \text{ , } \exists\, a \in C\text{-}P \text{ , } aq \in I$ .

En effet,

- si $q \in I$ , on prend $a = 1$ ;
- si $q \notin I$ , alors $q \notin \cap \{ P_\alpha \text{ ; } P_\alpha \neq P \}$ ; on prend un élément