MÉMOIRES DE LA S. M. F.

J. DIXMIER

Sur les sous-sommes d'une partition

Mémoires de la S. M. F. 2e série, tome 35 (1988)
<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1988_2_35__1_0>

Mémoire de la Société Mathématique de France, n° 35
Supplément au Bulletin de la S.M.F.
Tome 116, 1988, fascicule 4

SUR LES SOUS-SOMMES D'UNE PARTITION

J.Dixmier

Résumé . Soit $\pi = (a_1, a_2, \ldots, a_s)$ une partition de l'entier $n = a_1 + \ldots + a_s$. On appelle <u>sous-somme de</u> π toute somme $a_{i_1} + \ldots + a_{i_t}$ $(i_1 < \ldots < i_t)$. Soit $\Sigma(\pi) \subset [0,n]$ l'ensemble des sous-sommes de π . Le mémoire concerne $\Sigma(\pi)$. On étudie les 2 premières "composantes connexes" de $\Sigma(\pi)$, les partitions pour lesquelles $\Sigma(\pi)$ admet 1,2 ou 3 composantes connexes, et les partitions telles que $\Sigma(\pi)$ soit assez dense dans $[0,n]$. Soit Q un ensemble fini fixé d'entiers >0 ; soit $p(n;Q)$ le nombre de partitions π de n telles que $Q \cap \Sigma(\pi) = \emptyset$; on étudie le comportement asymptotique de $p(n;Q)$ quand $n \to \infty$; par exemple, $p(n;\{a\})/p(n) \sim (\pi/\sqrt{6})^{[a/2]+1} u(a)/n^{([a/2]+1)/2}$ quand $n \to \infty$, où $u(a)$ est un entier tel que $\log u(a) \sim (a/2)\log a$ quand $a \to \infty$. Pour n grand, presque toute partition π de n telle que $\Sigma(\pi) \cap \{1,2,\ldots,a\} = \emptyset$ vérifie $\Sigma(\pi) = \{a+1, a+2, a+3, \ldots, n-a-1\}$.

Abstract . Let $\pi = (a_1, a_2, \ldots, a_s)$ be an (integral) partition of the integer $n = a_1 + \ldots + a_s$. One calls <u>subsum of</u> π every sum $a_{i_1} + \ldots + a_{i_t}$ $(i_1 < \ldots < i_t)$. Let $\Sigma(\pi) \subset [0,n]$ be the set of all subsums of π. The paper is concerned with $\Sigma(\pi)$, which is far from being an arbitrary subset of $[0,n]$. One studies the 2 first "connected components" of $\Sigma(\pi)$, the partitions for which $\Sigma(\pi)$ has 1,2 or 3 connected components, and the partitions for which the complement of $\Sigma(\pi)$ in $[0,n]$ is not too big . On the other hand, let Q be a fixed finite set of positive integers ; let $p(n;Q)$ be the number of partitions π of n such that $Q \cap \Sigma(\pi) = \emptyset$ (so that $p(n;\emptyset)$ is the number classically denoted by $p(n)$); one studies the asymptotic behaviour of $p(n;Q)$ as $n \to \infty$; for instance, if a is an integer, one has $p(n;\{a\})/p(n) \sim (\pi/\sqrt{6})^{[a/2]+1} u(a)/n^{([a/2]+1)/2}$ as $n \to \infty$, where $u(a)$ is an integer such that $\log u(a) \sim (a/2)\log a$ as $a \to \infty$. One shows that, when n is big, almost all partitions π of n such that $\Sigma(\pi) \cap \{1,2,\ldots,a\} = \emptyset$ verify $\Sigma(\pi) = \{a+1, a+2, a+3, \ldots, n-a-1\}$.

Texte reçu le 3 février 1988.

J.DIXMIER, 11 bis rue du Val de Grâce, 75005 Paris, France.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION ET NOTATIONS.

0.1. Une partition est une suite $\pi = (a_1, a_2, \dots, a_s)$ où les a_i sont des entiers tels que $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_s > 0$. On admet la partition vide. Les a_i s'appellent les sommants de π. Si $a_1 + \dots + a_s = n$, n s'appelle la somme de π et se note $\sigma(\pi)$; on dit que π est une partition de n.

On appelle sous-partition de π toute sous-suite $(a_{i_1}, a_{i_2}, \dots, a_{i_t})$ où $i_1 < i_2 < \dots < i_t$. Les sommes des sous-partitions de π s'appellent les sous-sommes de π. On note $\Sigma(\pi)$ l'ensemble des sous-sommes de π. On dit qu'un nombre est représenté par π s'il appartient à $\Sigma(\pi)$. On a

$$\Sigma(\pi) \subset \{0, 1, 2, \dots, n\} \quad , \quad 0 \in \Sigma(\pi) \quad , \quad n \in \Sigma(\pi)$$

et $\Sigma(\pi)$ est symétrique, c'est-à-dire que

$$s \in \Sigma(\pi) \Rightarrow n - s \in \Sigma(\pi) .$$

Si π, π' sont des partitions, on note $\pi \amalg \pi'$, et l'on appelle somme directe de π et π', la suite obtenue en juxtaposant π et π', puis en réarrangeant dans l'ordre décroissant. Par exemple, $(3,2,1) \amalg (4,2) = (4,3,2,2,1)$.

0.2. Si $A, B \subset \mathbb{Z}$, $A + B$ (resp. $A - B$) désigne l'ensemble des $a + b$ (resp. $a - b$) où $a \in A$, $b \in B$. Rien à voir donc avec la différence ensembliste de 2 ensembles X et Y, qui est notée $X \setminus Y$. On écrit souvent x au lieu de $\{x\}$.

0.3. Les intervalles que nous considérerons seront toujours des intervalles finis d'entiers, i.e. des ensembles de la forme $\{x,x+1,\dots,y\}$ où $x,y \in \mathbb{Z}$, $x \leq y$. Un tel intervalle se note $[x,y]$.

Soit A une partie finie de $\mathbb{Z}$. Alors A s'écrit de manière unique

$$[a_1,b_1] \cup [a_2,b_2] \cup \dots \cup [a_{p+1},b_{p+1}]$$

où $a_i \leq b_i$ pour tout i , et $b_i + 2 \leq a_{i+1}$ pour $i \leq p$. On dira que $[a_i,b_i]$ est la $i^{\text{ème}}$ composante de A . Posons $J_1 = [b_1+1,a_2-1]$, $J_2 = [b_2+1,a_3-1],\dots,$ $J_p = [b_p+1,a_{p+1}-1]$. On dira que J_i est le $i^{\text{ème}}$ trou de A .

0.4. Soit π une partition de n . Les composantes et les trous de $\Sigma(\pi)$ seront aussi appelés les composantes et les trous de π . Soit $\Sigma(\pi) = I_1 \cup I_2 \cup \dots \cup I_{p+1}$ la décomposition de $\Sigma(\pi)$ en ses composantes. On a $0 \in I_1$, $n \in I_{p+1}$, $I_1 = n-I_{p+1}$, $I_2 = n-I_p,\dots$ Soient $J_1,J_2,\dots,J_p$ les trous de π . On a $J_1 = n-J_p$, $J_2 = n-J_{p-1},\dots$

Indépendamment de ces propriétés de symétrie, la répartition des trous et des composantes de $\Sigma(\pi)$ est loin d'être quelconque. En effet, pour n fixé, il y a $p(n)$ partitions de n , donc au plus $p(n)$ ensembles $\Sigma(\pi)$ possibles (et en fait beaucoup moins); or le nombre de sous-ensembles symétriques de $[0,n]$ est beaucoup plus grand que $p(n)$. Nous verrons que $\operatorname{Card} I_j \geq \operatorname{Card} I_1$ pour tout j (2.2), et que, si l'on pose $I_1 = [0,a]$ et $I_2 = [b,c]$, la connaissance de a et b impose des conditions assez délicates à c (2.9).

On a montré dans [1] que, si l'on note ρ la sous-partition de π formée des sommants $\le a$ (où $I_1 = [0,a]$), alors $\sigma(\rho) = a$. Nous verrons en 2.11 un résultat analogue faisant intervenir I_1 et I_2.

0.5. Une partition π de n est dite pratique si $\Sigma(\pi) = [0,n]$. Cette notion, moins la terminologie, a été introduite dans [2]. On donnera au chap.I diverses caractérisations des partitions pratiques, par exemple (1.7) :

pour qu'une partition $(a_1,a_2,\ldots,a_s)$ soit pratique, il faut et il suffit que $a_i \leq a_{i+1} + a_{i+2} + \ldots + a_s + 1$ pour $i = 1,2,\ldots,s$.

En fait, on étudie au chap.I une généralisation des partitions pratiques, à savoir les partitions qui n'ont pas de trop longs trous. Dans ce contexte, on généralise le développement asymptotique, établi dans [1], du nombre de partitions non pratiques (1.12).

0.6. Au chap.III, on donne quelques résultats sur les partitions à 1 ou 2 trous.

0.7. Fixons un ensemble fini Q d'entiers > 0. Soit $p(n;Q)$ le nombre de partitions de n qui ne représentent aucun élément de Q. Au chap. IV, nous étudions le comportement asymptotique de $p(n;Q)$ quand $n \to \infty$. Voici quelques-uns des résultats. Soit a un entier ≥ 1. Alors (notant $[x]$ la partie entière de x), on a (4.7, 4.2)

$$\frac{p(n;\{a\})}{p(n)} \sim \left(\frac{\pi}{\sqrt{6}}\right)^{[a/2]+1} \frac{u(a)}{n^{([a/2]+1)/2}} \quad \text{quand} \quad n \to \infty$$

où $u(a)$ est un entier calculé au chap.V ; on a $\log u(a) \sim \frac{1}{2} a \log a$ quand $a \to \infty$ (5.30).

Si $a \geq 3$, on a

$$\frac{p(n;\{a-1,a\})}{p(n)} \sim \frac{\alpha}{n^{([a/2]+2)/2}} .$$

Si a est pair ≥ 6 ,

$$\frac{p(n;\{a-2,a\})}{p(n)} \sim \frac{\beta}{n^{([a/2]+2)/2}} .$$

Si a est impair ≥ 3,

$$\frac{p(n;\{a-2,a\})}{p(n)} \sim \frac{\gamma}{n^{([a/2]+1)/2}}$$

(α,β,γ nombres > 0 dépendant de a). Cf.4.32.

Comme dans [1] , on pose $p(n;\{1,2,\ldots,m-1\}) = r(n,m)$.

0.8. Erdös et Szalay ont montré que presque toute partition de n est pratique (cf. [2] , th.1 pour un énoncé précis, et [1], th.2, pour un renforcement du résultat). Au chap.VI, nous généralisons ce phénomène au cas des partitions de n n'admettant pas les sommants $1,2,\ldots,a$ (a fixé) :

presque toutes ces partitions représentent $a+1, a+2,\ldots,n-a-1$.

0.9. Dans certaines sections de ce mémoire, nous écrirons des partitions comme des suites d'entiers non nécessairement décroissantes; il sera sous-entendu alors qu'il s'agit du réarrangement décroissant de ces suites. Il serait en effet parfois très malcommode de s'imposer le respect absolu de la définition 0.1. Cela n'entraînera aucun risque de confusion.

I. Généralisation des partitions pratiques.

1.1. Soient π une partition de n , a un entier ≥ 1 . Il est clair que les conditions suivantes sont équivalentes :

(i) π n'a aucun trou de cardinal $\geq$ a ;

(ii) tout intervalle de a entiers $> -a$ et $< n+a$ possède un élément représenté par π ;

(iii) $\cup_{x \in \Sigma(\pi)} [x, x+a-1] = [0, n+a-1]$

(iii bis) $\cup_{x \in \Sigma(\pi)} [x-a+1, x] = [-a+1, n]$.

1.2. Définition. On dit que π est a-pratique si π vérifie les conditions de 1.1.

Les partitions 1-pratiques ne sont autres que les partitions pratiques.

Même pour $a = 1$, les prop. 1.5, 1.7, 1.8 sont nouvelles. Par contre, les prop. 1.9, 1.10, 1.12 étaient déjà connues pour $a = 1$ ([1], lemme 4 et th. 2).

1.3. Lemme. *Soient $\pi = (a_1, \ldots, a_s)$ une partition, $\pi' = (a_2, \ldots a_s)$, et a un entier ≥ 1 . On suppose que π' est a-pratique, et que $a_1 \leq a_2 + \ldots + a_s + a$. Alors π est a-pratique.*

Soit $n = a_1 + \ldots + a_s$. Soit I un intervalle de a entiers > 0 et $< n$. Si $I \leq a_2 + \ldots + a_s + a - 1$, I possède un élément représenté par π' donc par π . Sinon, le plus petit élément c de l'intervalle n-I vérifie

$$c < n - (a_2 + \ldots + a_s + a - 1) = a_1 - a + 1 \leq a_2 + \ldots + a_s + 1$$

donc le plus grand élément de n-I est $< a_2 + \ldots + a_s + a$. D'après ce qui précède, n-I possède un élément représenté par π , donc I possède un élément représenté par π .

1.4. Lemme. *Soient $\pi = (a_1, \ldots, a_s)$, π' et a comme en 1.3. On suppose que tout intervalle de a entiers > 0 et $< a_1$ possède* *un élément représenté par* π . *Alors* $a_1 \leq a_2 + \ldots + a_s + a$, *et tout intervalle de* a *entiers* > 0 *et* $< a_2$ *possède un élément représenté par* π' .

Si $a_1 > a_2 + \ldots + a_s + a$, l'intervalle $[a_2 + \ldots + a_s + 1,\ a_2 + \ldots + a_s + a]$ ne possède aucun élément représenté par π , contrairement à l'hypothèse. Donc $a_1 \leq a_2 + \ldots + a_s + a$. La deuxième assertion du lemme est évidente.

1.5. *Proposition*. *Soient* $\pi = (a_1, \ldots, a_s)$ *une partition,* a *un entier* ≥ 1 . *Les conditions suivantes sont équivalentes* :

(i) π *est* a-*pratique*,

(ii) *tout intervalle de* a *entiers* > 0 *et* $< a_1$ *possède un élément représenté par* π .

(i) $\Rightarrow$ (ii) : évident.

(ii) $\Rightarrow$ (i) . Supposons vérifiée la condition (ii).

Si $s = 1$, on a $a \geq a_1$, et il est clair que π est a-pratique.

Supposons $s > 1$, et raisonnons par récurrence sur s . Soit $\pi' = (a_2, \ldots, a_s)$. D'après 1.4 et l'hypothèse de récurrence, π' est a-pratique, et $a_1 \leq a_2 + \ldots + a_s + a$. Donc π est a-pratique (1.3).

1.6. *Lemme* . *Soient* $\pi = (a_1, \ldots, a_s)$, π' *et* a *comme en* 1.3. *Les conditions suivantes sont équivalentes* :

(i) π *est* a-*pratique* ;

(ii) π' *est* a-*pratique et* $a_1 \leq a_2 + \ldots + a_s + a$.

(ii) ⇒ (i) résulte de 1.3.

(i) ⇒ (ii). Supposons que π soit a-pratique. Alors $a_1 \leq a_2 + \ldots + a_s + a$ (1.4). D'autre part, tout intervalle de a entiers > 0 et $< a_2$ possède un élément représenté par π' (1.4), donc π' est a-pratique (1.5).

1.7. Proposition. *Soient* $\pi = (a_1, \ldots, a_s)$ *une partition,* a *un entier* ≥ 1. *Les conditions suivantes sont équivalentes* :

(i) π *est* a-*pratique*;

(ii) $a_i \leq a_{i+1} + a_{i+2} + \ldots + a_s + a$ *pour* $i = 1, 2, \ldots, s$.

Pour $s = 1$, la condition (ii) signifie que $a_1 (= a_s) \leq a$, et la proposition est évidente. Le cas général en résulte par récurrence sur s grâce à 1.6.

La proposition 1.7 fournit un procédé rapide pour construire les partitions a-pratiques par récurrence sur leur longueur. Voici par exemple les partitions pratiques de longueur ≤ 4 :

1

1,1 2,1

1,1,1;2,1,1;3,1,1;2,2,1;3,2,1;4,2,1

1,1,1,1;2,1,1,1;3,1,1,1;4,1,1,1;2,2,1,1;3,2,1,1;4,2,1,1;5,2,1,1; 3,3,1,1;
4,3,1,1;5,3,1,1;6,3,1,1;2,2,2,1;3,2,2,1;4,2,2,1;5,2,2,1;6,2,2,1;3,3,2,1;
4,3,2,1;5,3,2,1;6,3,2,1;7,3,2,1;4,4,2,1;5,4,2,1;6,4,2,1;7,4,2,1;8,4,2,1

1.8. Proposition. *Soit* $\pi = (a_1, a_2, \ldots, a_s)$ *une partition* a-*pratique*.