MÉMOIRES DE LA S. M. F.

MARGUERITE FLEXOR

Images directes en cohomologie cohérente

Mémoires de la S. M. F. 2e série, tome 36 (1989)
<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1989_2_36__1_0>

© Mémoires de la S. M. F., 1989, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mémoires de la S. M. F. » (http://smf.emath.fr/Publications/Memoires/Presentation.html) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

Mémoire de la Société Mathématique de France , n° 36
Supplément au Bulletin de la S.M.F.
Tome 117, 1989, fascicule 1

IMAGES DIRECTES EN COHOMOLOGIE COHÉRENTE

Marguerite FLEXOR

Soient S un schéma affine noethérien, $f : X \longrightarrow S$ un morphisme propre, $\mathcal{F}$ un $\mathcal{O}_X$–module cohérent plat sur S et $Rf_*\mathcal{F}$ le complexe "*image directe*" associé à ces données. A. Grothendieck a montré que ce dernier est un complexe parfait, i.e. représenté par un complexe fini de $\mathcal{O}_S$–modules localement libres de type fini.

Soit p un entier ≥ 0 et remplaçons l'hypothèse f propre par l'hypothèse plus faible : les $\mathcal{O}_S$–modules $R^i f_*\mathcal{F}$ sont de type fini pour $i \leq p$. Peut–on trouver un complexe parfait L de $\mathcal{O}_S$–modules, un morphisme $L \longrightarrow Rf_*\mathcal{F}$ qui induit un isomorphisme sur la cohomologie en degrés $\leq p$. On montre, dans ce mémoire qu'il en est ainsi lorsque X est un ouvert assez gros d'un espace projectif et lorsque $\mathcal{F}$ vérifie de bonnes conditions de profondeur.

La construction de L est obtenue en montrant que $Rf_*\mathcal{F}$ est limite inductive d'une famille de complexes parfaits dont les complexes tronqués en degrés $\leq p$ forment une famille essentiellement constante. Pour cela, nous sommes amenés à considérer la catégorie des ind–objets "$\varinjlim$"L_α et par dualité celle des pro–objets "$\varprojlim$"K_α .

Let S be a affine scheme, $f : X \longrightarrow S$ be a proper map, $\mathcal{F}$ a coherent $\mathcal{O}_X$–module flat over S . By a theorem of A. Grothendieck, the complex $Rf_*\mathcal{F}$ is perfect, i.e. can be represented by a finite complex of locally free $\mathcal{O}_S$–modules of finite type. Let $p \geq 0$ and replace the hypothesis f proper by the weaker hypothesis : the $\mathcal{O}_S$–modules $R^i f_*\mathcal{F}$ are coherent for $i \leq p$. Then we show that there exists a perfect complex L , a morphism $L \xrightarrow{u} Rf_*\mathcal{F}$ such that $H^i(u)$ is an isomorphism for $i \leq p$, when X is a big open set of a projective space and $\mathcal{F}$ verifies good properties on depth. The construction of L is obtained from $Rf_*\mathcal{F}$ by consideration of ind–objects and by duality of pro–objects.

Texte reçu le 22 octobre 1986, révisé le 8 décembre 1988.
M.FLEXOR, Université Paris XI, Mathématiques, Bât.425, 91405 Orsay.

Table des matières

	Page
Introduction.	3
Première partie.	
I - Pro-objets.	8
II - La catégorie Pro D(A) et les bi-foncteurs $\mathrm{Ext}^{\cdot}_{\mathrm{Pro}(D(A))}$.	13
III - Approximation des pro-objets sur un anneau complet.	26
IV - Applications.	34
V - Dualité entre pro-objets et Ind-objets.	40
VI - Application aux complexes de A-modules plats.	45
Deuxième partie : cohomologie cohérente.	
0 - Introduction.	56
I - Un cas élémentaire.	61
II - Passage aux limites adiques.	68
III - Critères de finitude des foncteurs $R^j\rho_*(F\otimes_A .)$.	73
IV - Cohomologie cohérente sur un schéma quasi-projectif.	80

Introduction

Les théorèmes classiques de semi-continuité des fonctions du type

$$s \longrightarrow \dim_{k(s)} H^i(X \otimes k(s), F \otimes k(s))$$

où s est un point d'un schéma affine noethérien $S = \operatorname{Spec} A$; X est un S-schéma propre, F un $\mathcal{O}_X$-module de type fini plat sur A, sont conséquences de l'existence d'un complexe parfait qui représente la cohomologie relative de F au-dessus de S. Une manière de construire L est la suivante : on sait que, pour tout i, $H^i(X,F)$ est un A-module de type fini et est le i-ème groupe de cohomologie d'un complexe borné C de A-modules plats. En général C n'est pas un complexe parfait (on peut prendre pour C un complexe de cochaines de Cech associé à un recouvrement ouvert affine de X). On construit L en procédant "de la droite vers la gauche", i.e., si C est à cohomologie dans $[0,p]$, on construit d'abord L^p, puis $L^{p-1}, \ldots$ de manière que L soit un complexe parfait quasi-isomorphe à C.

Lorsque $X \longrightarrow S$ est de type fini mais non nécessairement propre, il se peut que $H^0(X,F)$ soit un A-module de type fini et le reste après tout changement de base et dans ce cas, on aimerait bien avoir un théorème de semi-continuité du type précédent.

Faute d'informations sur les groupes $H^i(X,F)$, pour $i > 0$, cette manière d'opérer "de la droite vers la gauche" ne fonctionne plus.

Par contre une extension d'un théorème de D. Lazard donne une première indication : le complexe C, qui réalise la cohomologie de F au-dessus de S, est limite d'une famille inductive filtrante de complexes parfaits (L_λ). Dans ces conditions, pour tout A-module M, $H^i(X,F \otimes_A M) = \varinjlim_\lambda H^i(L_\lambda \otimes_A M)$ et on peut se demander, lorsque p est un entier ≥ 0 et lorsque $H^i(X,F \otimes_A M)$ est un A-module de type fini pour tout $i \leq p$ et tout A-module de type fini M, si un complexe L_λ (quitte à modifier la famille (L_λ)) fournit déjà la cohomologie en degré $\leq p$ de $C \otimes_A M$, pour tout A-module M.

Indiquons comment l'on procède pour obtenir ce complexe parfait L qui représente éventuellement la cohomologie de $R\Gamma(X,F \otimes .)$ en degré $\leq p$: soit (L_λ) la famille inductive de complexes parfaits, telle que $C = \varinjlim_\lambda L_\lambda$, la famille duale

$(L_\lambda^* = \mathrm{Hom}^\cdot(L_\lambda, A))$ définit un pro-objet dont il s'agit de voir que la cohomologie en degré dans l'intervalle $[-p,0]$ est essentiellement constante. On peut cette fois procéder "de la droite vers la gauche".

Il y a deux parties bien distinctes dans ce travail.

Première partie : elle est "cohomologique" et consacrée aux :

1) pro-objets de la catégorie dérivée de la catégorie des A-modules. On donne des critères pour qu'un système projectif de complexes bornés soit essentiellement constant, par exemple si :

- sa cohomologie est essentiellement constante (théorème 1)
- il existe une bonne stratification de $S = \mathrm{Spec}\ A$ telle que sa cohomologie soit essentiellement constante sur chaque déformation infinitésimale de chaque strate (cf. théorèmes 3 et 4)

2) ind-objets, dualité entre pro-objets et ind-objets. On obtient le théorème (nommé théorème 7) sur lequel s'appuie la deuxième partie : la cohomologie en degré $\leq p$ de $C\otimes_A \cdot$ est donnée par la cohomologie en degré $\leq p$ de $L\otimes_A \cdot$, où L est un complexe parfait, si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

α) la cohomologie de $C\otimes_S \cdot$ en degré $\leq p$ commute aux limites adiques

β) pour tout fermé irréductible S' de $\mathrm{Spec}\ A$, il existe un ouvert affine non vide $U = \mathrm{Spec}\ B$ de S' sur lequel la cohomologie de $(C\otimes_A B)\otimes_B \cdot$ est donnée par la cohomologie en degré $\leq p$ d'un complexe $L^B\otimes_B \cdot$, où L^B est un complexe parfait sur B .

Deuxième partie : elle est de nature géométrique. On revient au complexe $R\Gamma(X,\mathcal{F})$, i.e. à la théorie des faisceaux algébriques cohérents et on montre en particulier que, lorsque X est quasi-projectif et lorsque $\mathcal{F}$ vérifie des conditions de profondeur appropriées, alors un tel complexe L existe, en vérifiant que les conditions α) et β) citées ci-dessus sont satisfaites.

Les objets et techniques employés dans cette deuxième partie étant de nature distincte de ceux de la première partie une introduction spécifique est faite au début de cette deuxième partie. De plus, les résultats de la première partie utilisés étant essentiellement les théorèmes 6 et 7, elle peut être lue directement.

Je tiens à remercier Michel Raynaud et Lucien Szpiro pour l'aide, les idées et les techniques qu'ils m'ont apportés dans l'élaboration de ce travail sinon dans la vie mathématicienne.

Je tiens encore à remercier vivement Mme Bonnardel qui a bien voulu se charger de la frappe de ce manuscrit.

Première partie

I - Pro-objets

Soit A une catégorie. Nous aurons à considérer la catégorie $\mathrm{Pro}(A)$ dont :

- les objets sont les systèmes projectifs $(M_\alpha)_{i\in I}$ d'objets de A, si I est un ensemble d'indices préordonné filtrant variable. On note $\text{"}\varprojlim_{\alpha\in I}\text{"}\, M_\alpha$ l'objet de $\mathrm{Pro}(A)$ correspondant

- si $\text{"}\varprojlim_{\alpha\in I}\text{"}\, M_\alpha$ et $\text{"}\varprojlim_{j\in J}\text{"}\, N_j$ sont deux objets de $\mathrm{Pro}(A)$:

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Pro}(A)}(\text{"}\varprojlim_{\alpha\in I}\text{"}\, M_\alpha, \text{"}\varprojlim_{j\in J}\text{"}\, N_j) = \varprojlim_{j\in J}\ \varinjlim_{\alpha\in I} \mathrm{Hom}_A(M_\alpha, N_j) .$$

Le foncteur $i : A \longrightarrow \mathrm{Pro}(A)$ qui à un objet M de A associe le pro-objet $(M_\alpha)_{\alpha\in I}$, I réduit à un élément α et $M_\alpha = M$, est pleinement fidèle.

De plus, si les limites projectives existent dans A, on dispose aussi du foncteur :

$$\varprojlim : \mathrm{Pro}(A) \longrightarrow A$$

défini par $\varprojlim(\text{"}\varprojlim_{\alpha\in I}\text{"}\, M_i) = \varprojlim_{\alpha\in I} M_\alpha$ et d'une flèche naturelle dans $\mathrm{Pro}(A)$:

$$i(\varprojlim_{\alpha\in I}(\text{"}\varprojlim_{\alpha\in I}\text{"}\, (M_\alpha)) \longrightarrow \text{"}\varprojlim_{\alpha\in I}\text{"}\, M_\alpha .$$

Soit $\text{"}\varprojlim_{\alpha\in I}\text{"}\, M_\alpha \in \mathrm{Pro}(A)$. On dit que $\text{"}\varprojlim_{\alpha\in I}\text{"}\, M_\alpha$ est essentiellement nul si pour tout α, il existe $\alpha' \geq \alpha$ tel que le morphisme de transition $M_{\alpha'} \longrightarrow M_\alpha$ soit nul.

Si $F : A \longrightarrow A'$ est un foncteur covariant, il se prolonge de manière évidente en un foncteur que l'on note encore $F : \mathrm{Pro}(A) \longrightarrow \mathrm{Pro}(A')$.

<u>Définition</u>. $\tilde{A}$ = <u>sous-catégorie pleine de</u> $\mathrm{Pro}(A)$ <u>des objets isomorphes aux objets du type</u> $i(M)$, <u>pour</u> $M \in A$.

La proposition qui suit donne une caractérisation de $\tilde{A}$, lorsque A est une catégorie abélienne.

<u>Proposition</u> 1. <u>Soient</u> A <u>une catégorie abélienne</u>, $M \in A$, $\text{"}\varprojlim_{\lambda}\text{"}\, M_\lambda \in \mathrm{Pro}(A)$. <u>Les conditions suivantes sont équivalentes</u> :

1) "$\varprojlim_\lambda$" $M_\lambda \simeq i(M)$.

2) Il existe $\psi = (\psi_\lambda) \in \varprojlim \mathrm{Hom}(M,M_\lambda)$, ψ_λ monomorphisme pour $\lambda \gg 0$ tel que "$\varprojlim$" Coker ψ_λ soit essentiellement nul.

2') Comme en 2), de plus M est facteur direct de M_λ (par ψ_λ) pour $\lambda \gg 0$.

3) Il existe $\varphi = (\varphi_\lambda)_{\lambda \gg 0} \in \varinjlim \mathrm{Hom}(M_\lambda,M)$, φ_λ épimorphisme pour $\lambda \gg 0$ et tel que "$\varprojlim_{\lambda \gg 0}$" Ker φ_λ soit essentiellement nul.

3') Comme en 3), de plus M est quotient direct (par φ_λ) de M_λ pour $\lambda \gg 0$.

4) Les deux foncteurs sur A , $h_M = \mathrm{Hom}_A(M,.)$ et $h_{\text{"}\varprojlim\text{"}M_\lambda} = \varinjlim \mathrm{Hom}_A(M_\lambda,.)$ sont isomorphes.

De plus s'il en est ainsi, $\varprojlim_\lambda M_\lambda$ existe dans A et on a :

$$i(\varprojlim_\lambda M_\lambda) \simeq \text{"}\varprojlim_\lambda\text{"} M_\lambda \quad \text{dans} \quad \mathrm{Pro}(A) .$$

Remarque. Selon [5], l'assertion 4) signifie que le foncteur pro-représentable $h_{\text{"}\varprojlim\text{"}M_\lambda}$ est effectivement représentable.

Démonstration :

La donnée d'un morphisme $\varphi : \text{"}\varprojlim\text{"} M_\lambda \longrightarrow i(M)$ dans $\mathrm{Pro}(A)$ est équivalente à la donnée d'un système de flèches $(\varphi_\lambda)_{\lambda \gg 0}$

$$\varphi_\lambda : M_\lambda \longrightarrow M$$

compatibles aux morphismes de transition, i.e. $\beta \geq \lambda$, si $\pi_{\beta\lambda}$ est le morphisme de transition :

$$\varphi_\beta : M_\beta \xrightarrow{\pi_{\beta\lambda}} M_\lambda \xrightarrow{\varphi_\lambda} M .$$

La donnée d'une flèche φ^{-1} inverse de φ dans $\mathrm{Pro}(A)$ est équivalente à la donnée d'un système de flèches $(\psi_\lambda)_\lambda$, $\psi_\lambda : M \longrightarrow M_\lambda$, compatibles aux morphismes de transition, i.e. pour $\beta \geq \lambda$, $\psi_\lambda = \pi_{\beta\lambda} \circ \psi_\beta$ et vérifiant de plus

a) $\varphi \circ \varphi^{-1} = 1d_{i(M)} = 1d_M$ (car i est pleinement fidèle), i.e. pour $\lambda \gg 0$ $1d_M = \varphi_\lambda \circ \psi_\lambda$

b) $\varphi^{-1} \circ \varphi = 1d_{\text{"}\varprojlim\text{"}M_\lambda}$, i.e. pour $\lambda \gg 0$ et $\beta \geq \lambda$, $\psi_\lambda \circ \varphi_\beta = \pi_{\beta\lambda}$.

On vérifie aisément que 1) $\Longleftrightarrow$ 2') $\Longleftrightarrow$ 3'). Si l'une de ces conditions est vérifiée, ψ_λ est injective pour $\lambda \gg 0$ et on a