MÉMOIRES DE LA S. M. F.

B. HELFFER
P. KERDELHUE
J. SJÖSTRAND

Le papillon de Hofstadter revisité

Mémoires de la S. M. F. 2e série, tome 43 (1990)
<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1990_2_43__1_0>

Mémoire de la Société Mathématique de France, n° 43
Supplément au Bulletin de la S.M.F.
Tome 118, 1990, fascicule 3

LE PAPILLON DE HOFSTADTER REVISITÉ

par B.Helffer , P. Kerdelhué et J.Sjöstrand

RÉSUMÉ

Dans ce travail, nous poursuivons l'étude de l'équation de Harper $\cosh D_x + \cos x$ d'un point de vue plus qualitatif en approfondissant les points de vue développés par Hofstadter et Claro-Wannier. On montre comment la structure du papillon et son caractère cantorien se déduisent de la conjecture que les trous dans le spectre ne se referment que pour des valeurs rationnelles de $h/2\pi$.

ABSTRACT

In this paper, we continue the study of the Harper's operator $\cosh D_x + \cos x$ with a more qualitative point of view. In particular, we analyze more deeply the approaches by Hofstadter and Claro-Wannier. We show how the structure of the butterfly and its Cantor's character can be deduced of the conjecture that the gaps in the spectrum can only disappear for rational values of $h/2\pi$.

Texte reçu le 15 février 1990

B.Helffer : DMI , Université de Nantes, 44072 Nantes Cedex 03 URA CNRS 758
et DMI , ENS Ulm , 45 rue d'Ulm, 75230 Paris Cedex 05

P.Kerdelhue : DMI , ENS Ulm , 45 rue d'Ulm, 75230 Paris Cedex 05
et Dép. de Mathématiques de Paris-Sud 91405 Orsay Cedex, URACNRS 760

J.Sjöstrand: Dép. de Mathématiques de Paris-Sud 91405 Orsay Cedex, URACNRS760

§0 Introduction

Dans toute une série d'articles ($[\text{He-Sj}]_{1,2,3}$), deux des auteurs ont développé à la suite des travaux de Wilkinson $[\text{Wilk}]_{1,2,3,4}$ une étude semi-classique du fameux papillon de Hofstadter. On trouvera dans [Gu-He-Tr] toute une série de dessins décrivant les résultats obtenus.

Ces résultats, même s'ils apportent un bon éclairage sur la plupart des phénomènes observables sur le papillon, sont, de par leur caractère asymptotique, partiels. On se propose ici de faire le point sur toute une famille d'autres résultats, ou heuristiques ou dont la démonstration n'a pas été publiée, concernant la structure globale du papillon et qui tournent autour de la conjecture des dix Martinis due à M.Kac. Nous pensons ici à la discussion initiale de Hofstadter ([Ho]) qui sera reprise au §4, aux raisonnements sur la densité d'état initialisés par Claro et Wannier ([Cl-Wa]), à des arguments de perturbation indiqués par Bellissard et Simon ([Be-Si]) que nous aborderons au §2 et enfin au lien avec les classes de Chern observé par Wilkinson ($[\text{Wilk}]_{2,4}$) que nous préciserons dans un cadre semi-classique au §5. Seul le point de vue des C^*-algèbres n'a pas été repris ici et nous renvoyons pour cette question aux surveys de J.Bellissard ($[\text{Be}]_{1,2}$).

Ceci ne nous a malheureusement pas conduit à la démonstration de la conjecture des dix Martinis dans le cas général (des réponses partielles sont obtenues chez Bellissard-Simon [Be-Si], Helffer-Sjöstrand $[\text{He-Sj}]_{1,2,3}$, Van Mouche $[\text{Mo}]_{1,2}$, Choi-Elliott-Yui [C-E-Y]).

Dans un appendice ajouté dans la version finale de ce dernier article, les auteurs donnent une démonstration détaillée d'un résultat annoncé dans [Be-Si] dont nous proposerons une autre démonstration au §3.1 en s'appuyant sur les résultats du §2. Cet appendice contient également des considérations recoupant celles du §5. Les techniques d'approche sont cependant différentes. Ce travail a été annoncé par l'un des auteurs au colloque de Delphes en septembre 89.

§1 Rappels sur la densité d'états

On rappelle dans cette section un certain nombre de résultats classiques qui sont utilisés sans démonstration dans les autres paragraphes et on précise certains résultats. Il s'agit en particulier de rappeler le lien entre différentes définitions.

Première approche :

Rappelons que nous nous intéressons principalement dans cet article à la famille d'opérateurs $P^{\lambda}_{\alpha,\theta}$ définis sur $\ell^2(\mathbb{Z})$ par :

(1.1) $\ell^2(\mathbb{Z}) \ni u_n \to (P^{\lambda}_{\alpha,\theta} u)_n = (1/(1+\lambda))((\lambda/2)(u_{n+1}+u_{n-1}) + \cos(2\pi(\alpha n+\theta))u_n)$

(à normalisation près, c'est l'opérateur de Harper)

On introduit dans $\tilde{Q}=[0,1]\times[-1,1]$ l'ensemble :

(1.2) $\Sigma^{\lambda} = \cup_{\alpha} (\alpha,\Sigma^{\lambda}_{\alpha})$ où $\Sigma^{\lambda}_{\alpha}$ est défini par:

(1.3) $\Sigma^{\lambda}_{\alpha} = \cup_{\theta} (\Sigma^{\lambda}_{\alpha,\theta})$

où $\Sigma^{\lambda}_{\alpha,\theta}$ désigne le spectre de $P^{\lambda}_{\alpha,\theta}$.

La densité d'état intégrée k^{λ}_{α} a été introduite depuis longtemps par les physiciens (cf [Si] ,[CFKS] , [Av-Si]...) . Si $\mathcal{X}_{\ell}$ est l'opérateur de multiplication (opérant sur $\ell^2(\mathbb{Z})$) par la fonction caractéristique de $\{ n \mid -\ell \leqslant n \leqslant \ell \}$, on peut la définir par :

(1.4) $k^{\lambda}_{\alpha,\theta}(E) = \lim_{\ell\to\infty} (2\ell+1)^{-1} \mathrm{Tr}\,(\mathcal{X}_{\ell}\, P_{(-\infty,E)}(P^{\lambda}_{\alpha,\theta}))$

où $P_{\Omega}(P^{\lambda})$ est la projection spectrale de P^{λ} sur l'intervalle Ω .

Elle a les propriétés suivantes :

(1.5) $E \to k^{\lambda}_{\alpha,\theta}(E)$ est indépendante de θ dans $\mathbb{R}\setminus \Sigma^{\lambda}_{\alpha}$. Elle est indépendante de θ si α est irrationnel.

(1.6) $E \to k^{\lambda}_{\alpha,\theta}(E)$ est continue , constante dans chaque trou du spectre (cf [Si] qui réfère à [J-M],[Ben-Pas] et à [Sh]).

Compte tenu de (1.4) et (1.5) , on la notera k^{λ}_{α} lorsqu'elle ne dépend pas de θ (i.e pour α irrationnel ou pour E dans $\mathbb{R}\setminus\Sigma^{\lambda}_{\alpha}$, cf (1.8) et(1.12)).

(1.7) Pour E dans $\mathbb{R}\setminus \Sigma^{\lambda}_{\alpha}$, il existe deux entiers m et n dans $\mathbb{Z}$ tels que :

$k^{\lambda}_{\alpha}(E) = m\alpha + n$

(cf $[Be]_1$ pour une présentation et des références comme par exemple [Pi-Vo])

De plus , dans une composante connexe $\mathcal{S}^{\lambda}$ de $\tilde{Q}\setminus \Sigma^{\lambda}$, on peut trouver m et n tels que (1.7) soit vérifiée pour tout (α,E) dans $\mathcal{S}^{\lambda}$.

(1.8) Pour E dans $\mathbb{R}\setminus\Sigma^{\lambda}_{\alpha}$ et $\alpha = p/q$, $k^{\lambda}_{\alpha}(E)$ se calcule comme le nombre de bandes situées avant E divisé par le nombre total de bandes, i.e q.

On a en effet la formule (qui résulte de la théorie de Floquet) :

(1.9) $k^{\lambda}_{\alpha}(E)= (1/q)\ (\Sigma_n\int_{\lambda_n(\theta)\leqslant E} d\theta)$

où $\lambda_n(\theta)$ $n=1, \ldots,q$ désigne la $n^{\text{ème}}$ valeur propre de Floquet.

(1.10) Soit $\alpha\in]0,1[$, I un intervalle contenu dans [0,1] et $I\ni \lambda \to E(\lambda)$ un chemin continu à valeur dans [-1,1] tel que : $\forall\ \lambda\in I$, $(\alpha,E(\lambda)) \in \tilde{Q}\setminus \Sigma^{\lambda}$, alors $k^{\lambda}_{\alpha}(E(\lambda))$ ne dépend pas de λ .

(1.11) Si $E \in \Sigma^{\lambda}_{\alpha,\theta}$, alors $k^{\lambda}_{\alpha,\theta}(E+\varepsilon)- k^{\lambda}_{\alpha,\theta}(E-\varepsilon)>0$, $\forall\ \varepsilon>0$.

Soit k^{λ}_{α} la fonction définie par :

(1.12) $k^{\lambda}_{\alpha}(E) = \int k^{\lambda}_{\alpha,\theta}(E)\, d\theta$

Alors, pour α irrationnel, on a :

(1.13) $k^{\lambda}_{\alpha}(E) = k^{\lambda}_{\alpha,\theta}(E)$

On notera parfois dans la suite : $k(\alpha,E)=k_{\alpha}(E)$.

(1.14) Si $E \in \Sigma^{\lambda}_{\alpha}$, alors $k^{\lambda}_{\alpha}(E+\varepsilon) - k^{\lambda}_{\alpha}(E-\varepsilon) > 0$, $\forall\ \varepsilon > 0$.

(C'est (1.10) dans le cas irrationnel et c'est facile à vérifier dans le cas rationnel par la théorie de Floquet.)

<u>Deuxième approche :</u>

On a vu dans ([Wilk]$_{1}$,[He-Sj]$_{1,2,3}$) tout l'intérêt qu'il pouvait y avoir à penser à l'opérateur de Harper comme un pseudo-différentiel $(2\pi\alpha)$-quantifié à symbole périodique en (x,ξ). Cette approche remonte aux travaux de Wilkinson et a été utilisée intensivement dans les travaux de [He-Sj] concernant l'équation de Harper. Dans cette approche, on considère l'opérateur pseudo-différentiel de symbole de Weyl :

$p(x,\xi) = (1/(1+\lambda))(\lambda \cos x + \cos \xi)$

et le spectre de $(1/(1+\lambda))(\lambda \cos x + \cos (2\pi\alpha D_x))$ est exactement $\Sigma^{\lambda}_{\alpha}$.

Plus généralement, considérons donc $P_{\alpha} = P(x, 2\pi\alpha D_x)$ un opérateur $2\pi\alpha$-pseudo-différentiel de symbole de Weyl $p(x,\xi)$ supposé C^{∞} et 2π-périodique à la fois en x et ξ (p dépend éventuellement de α). On définit : $\widetilde{tr}(P_{\alpha})$ comme la valeur moyenne du symbole de P.

Introduisant alors la série de Fourier de P :

(1.15) $p(x,\xi) = \Sigma\Sigma\ \hat{p}(j,k)\ e^{i(jx+k\xi)}$,

on a alors :

(1.16) $\widetilde{\mathrm{tr}}\,(P_\alpha) = \hat{p}(0,0)$.

Si p est réel, alors $p(x,2\pi\alpha D_x)$ est autoadjoint et si $f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $f(P)$ est aussi le $2\pi\alpha$-quantifié de Weyl de $p_{f,\alpha}(x,\xi)$ qui a les mêmes propriètés. On peut donc définir $\widetilde{\mathrm{tr}}\, f(P_\alpha)$, et il existe une mesure de Borel ρ_α telle que :

(1.17) $\widetilde{\mathrm{tr}}\, f(P_\alpha) = \int f(t)\, \rho_\alpha(dt)\ ,\ \forall\, f \in C_0^\infty(\mathbb{R})$

On a en effet :

(1.18) $\widetilde{\mathrm{tr}}\, f(P_\alpha) \geqslant 0$ pour $f \geqslant 0$

(cf $[\text{He-Sj}]_4$ ou voir plus loin la remarque 1.1 après (1.23)').

Au niveau des $2\pi\alpha$-quantifiés de Weyl, on trouve à l'aide de (1.15) :

(1.19) $P = \Sigma\Sigma\ \hat{p}(j,k)\, e^{2\pi ijk\alpha/2}\, e^{ijx} \tau_{-2\pi k\alpha}$,

où $\tau_\beta u(x) = u(x-\beta)$.

Pour chaque $\theta \in \mathbb{R}$, P opère sur $\ell^2(2\pi(\{\theta\}+\mathbb{Z}\alpha))$ et si on écrit :

$\{\theta\}+\mathbb{Z}\alpha \ni (x/2\pi) = n\alpha+\theta$

l'action est donnée en identifiant $\ell^2(2\pi(\{\theta\}+\mathbb{Z}\alpha))$ et $\ell^2(\mathbb{Z})$ par la matrice $\mathcal{M}_\theta$ avec :

(1.20) $\mathcal{M}_\theta(n,m) = \Sigma_j \hat{p}(j,n-m) e^{\pi ij(n-m)\alpha}\, e^{2\pi ij(n\alpha+\theta)}$

En particulier,

(1.21) $\mathcal{M}_\theta(n,n) = \Sigma_j \hat{p}(j,0)\, e^{2\pi ij\theta}\, (e^{2i\pi j\alpha})^n$

Considérons d'abord le cas où $\alpha \notin \mathbb{Q}$. On s'intéresse à la moyenne de $n \to \mathcal{M}_\theta(n,n)$:

(1.22) $(1/2N+1))\, \sum_{-N}^{N} \mathcal{M}_\theta(n,n) = \sum_j \hat{p}(j,0)\, e^{2\pi ij\theta} \Big((1/2N+1))\, \sum_{-N}^{N} (e^{2i\pi j\alpha})^n\Big)$.

Ici pour chaque j fixé :

$\Big((1/2N+1))\, \sum_{-N}^{N} (e^{2i\pi j\alpha})^n\Big)$ est égal à 1 si $j=0$ et tend vers 0, lorsque N tend vers l'∞ si $j\neq 0$.

De plus :

$$\left|\left((1/2N+1)\right)\sum_{-N}^{N}\left(e^{2i\pi j\alpha}\right)^n\right)\right| \leqslant 1$$

et comme $j \to \hat{p}(j,0)e^{2i\pi j\theta}$ est sommable, une application du théorème de convergence dominée donne :

(1.23) $(1/2N+1))\sum_{-N}^{N} \mathcal{M}_\theta(n,n) \to \hat{p}(0,0) = \tilde{tr}\,(P)$ quand N tend vers l'∞.

Lorsque α est rationnel, la limite dépendra de θ, mais on observe que si on fait la moyenne par rapport à θ, on a :

(1.23)' $(1/2N+1))\int\left(\sum_{-N}^{N} \mathcal{M}_\theta(n,n)\right) d\theta = \hat{p}(0,0)$ pour tout N.

Dans la suite, on définit donc $\tilde{tr}(\mathcal{M}_\theta)$ comme la limite dans (1.23) (ou 1.23').

De même qu'on a associé à P la matrice infinie $\mathcal{M}_\theta$, on peut, pour tout f dans $C_0^\infty(\mathbb{R})$, associer à f(P) la matrice infinie de $f(\mathcal{M}_\theta)$.

<u>Remarque 1.1</u> :

Il est facile de montrer maintenant (1.18) plus directement. La positivité de f(P) entraîne celle de $f(\mathcal{M}_\theta)$ et de $f(\mathcal{M}_\theta)(n,n)$ pour tout n. On conclut alors par (1.23)'.

On peut donc écrire :

$\tilde{tr}\, f(\mathcal{M}_\theta) = \int f(t)\ \rho(dt)$

Dans le cas de l'équation de Harper, on a ainsi identifié le premier point de vue avec le second et on a donc :

(1.23) $k(\alpha,E) = \int_{-\infty}^{E} \rho_\alpha(dt)$.

Ceci nous permettra d'utiliser indifféremment les techniques des