MÉMOIRES DE LA S. M. F.

A. UNTERBERGER

Quantification relativiste

Mémoires de la S. M. F. 2^e^ série, tome 44-45 (1991)
<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1991_2_44-45__1_0>

Mémoire de la Société Mathématique de France, n° 44/45
Supplément au Bulletin de la S.M.F.
Tome 119 , 1991, fascicule 1

Quantification relativiste

par A. Ünterberger

RÉSUMÉ

Ce mémoire établit les principales propriétés du calcul de Klein-Gordon et en donne une application à l'oscillateur de Mathieu : la relation de ce calcul à la mécanique relativiste est analogue à celle du calcul de Weyl à la mécanique classique.

ABSTRACT

In this paper, the basic properties of the Klein-Gordon symbolic calculus of operators are given, as well as an application to the Mathieu oscillator : the relationship of this calculus to relativistic mechanics is the same as that of the Weyl calculus to classical mechanics.

Texte reçu le 15 mars 1990, révisé le 11 septembre 1990.

Département de Mathématiques, U.E.R. des Sciences de Reims,
Moulin de la Housse, BP 347, 51062 Reims Cedex, France

TABLE DES MATIÈRES

0.	Introduction	3
1.	L'espace-temps et l'espace des observateurs	19
2.	Le calcul symbolique de Klein-Gordon	25
3.	Une digression sur le calcul de Weyl	37
4.	Etats cohérents et calcul de Wick relativistes	45
5.	Opérateurs invariants sur l'hyperboloïde de masse	51
6.	Lien entre les symboles de Klein-Gordon et de Wick relativiste	57
7.	Symbole de Klein-Gordon, symbole standard et autres	63
8.	Inégalités géométriques et classes de symboles	69
9.	La continuité des opérateurs de Klein-Gordon	87
10.	Caractérisation des opérateurs et composition	95
11.	La composition des symboles	105
12.	Symboles des générateurs infinitésimaux de la représentation de Bargmann-Wigner	123
13.	L'algèbre enveloppante	139
14.	Développements asymptotiques	149
15.	Opérateur d'Euler relativiste, groupe de De Sitter, oscillateur de Mathieu	169
16.	Contraction de l'analyse de Klein-Gordon vers celle de Weyl	197
	Appendice	208
	Bibliographie	209
	Index des notations	213
	Index	215

INTRODUCTION

On peut s'intéresser à la quantification pour des raisons très différentes. Si la mécanique quantique des systèmes à un nombre fini de degrés de liberté a cessé, depuis longtemps, d'occuper une position centrale parmi les questions que pose la physique théorique, cela ne signifie pas, pour autant, que les idées qui en sont issues aient cessé d'être une source d'inspiration pour les mathématiques. L'analyse harmonique fournit une deuxième raison de s'y intéresser, soit que la quantification y soit regardée comme instrument fondamental de la théorie des représentations, soit, plus simplement, que l'on y voie une méthode de découverte de relations, ou de symétries, nouvelles et parfois surprenantes. La liste de ces raisons n'est pas close si l'on y ajoute que l'analyse pseudodifférentielle, qui aurait pu - mais ne l'a, de fait, pas été - être issue directement des relations d'Heisenberg, ne peut que gagner à une vision plus générale de ses concepts. Ces trois points de vue ont guidé, à des degrés divers, notre recherche dans ce domaine.

D'après le témoignage des physiciens les plus dignes de confiance, la physique doit être relativiste. Cela signifie, pour commencer, que le groupe de Poincaré et les objets qui s'y rattachent (équation des ondes...) sont un meilleur outil que le groupe de Galilée, ou celui d'Heisenberg, pour une description acceptable de la réalité. Bien entendu, un mathématicien est libre d'attacher son intérêt aux structures qu'il tient, de son propre jugement, comme les plus intéressantes, en premier lieu les plus générales ou les plus simples : à n'en pas douter, la mécanique relativiste est plus compliquée que la mécanique newtonienne, et il en sera de même pour ce qui concerne l'analyse développée ici par comparaison à son analogue non-relativiste. Notre ambition est, malgré cela, mathématique avant tout : nous pensons qu'une partie des mathématiques peut être relativiste, et qu'il est intéressant d'explorer le nouveau domaine ainsi conçu.

Le présent travail développe de façon assez approfondie l'analogue relativiste du calcul symbolique des opérateurs : le calcul de Klein-Gordon. Il introduit aussi une idée qui nous paraît également prometteuse, à savoir qu'une partie substantielle de la théorie des fonctions spéciales peut être généralisée sous un angle relativiste.

Défendons-nous d'avoir prétendu contribuer à une grandiose synthèse de la mécanique quantique et de la relativité : nous savons bien que les véritables problèmes posés par une telle unification exigent (cf. Landau-Lifschitz [19], p.15) "des concepts physiques fondamentalement nouveaux" plutôt qu'un nouvel appareil mathématique ; encore n'est-il pas sûr qu'une telle quête soit bien d'actualité. Cependant, certains des obstacles souvent présentés contre l'existence d'une mécanique quantique relativiste analogue à la mécanique quantique habituelle reposent sur une erreur que, croyons-nous, ce travail peut aider à dissiper : celle-ci consiste à voir dans la quantification relativiste une synthèse de la mécanique classique relativiste et des relations d'incertitude, en d'autres termes une union contre nature des groupes de Poincaré et d'Heisenberg. Il y a plus de soixante ans que l'équivalence - en vue de fonder la mécanique quantique - des points de vue d'Heisenberg et de Schrödinger a été établie mais, par un accident fâcheux, le premier a fini par être souvent confondu avec les relations du même nom ; en réalité, les relations de commutation dans une algèbre de Lie quelconque sont la bonne généralisation du premier point de vue, et les équations de champ quelconques la bonne généralisation du second. A ce titre, on peut fonder un calcul symbolique des opérateurs (une théorie des observables, diraient les physiciens) sur le groupe de Poincaré, sans nul besoin de faire intervenir celui d'Heisenberg.

A l'exception de la remarque qui précède, nous n'avons pas la prétention d'avoir contribué en quoi que ce soit à la physique. En revanche, nous avons emprunté à cette dernière les concepts fondamentaux que sont l'espace-temps, l'équation de Klein-Gordon et la représentation de Bargmann-Wigner. Ils sont tous présentés, à la façon axiomatique traditionnelle des mathématiciens, dans les toutes premières pages : après cela, il ne s'agira plus que de mathématiques.

ÉQUATIONS d'ÉVOLUTION ET RÈGLES DE QUANTIFICATION

Le temps ne joue aucun rôle dans la définition de l'analyse pseudo-différentielle de Weyl sur $\mathbb{R}^n$: il ne s'agit pas d'autre chose que de donner un sens aux "fonctions" des opérateurs (ne commutant pas entre eux) $q_j = x_j$ et $p_j = (2i\pi)^{-1} \frac{\partial}{\partial x_j}$. On pourrait proposer un programme analogue pour la définition du calcul de Klein-Gordon, se bornant à dire qu'il faut, dans ce qui précède, remplacer q_j par l'opérateur (non différentiel) $x_j(1- \frac{\Delta}{4\pi^2 c^2})^{\frac{1}{2}}$: on voit de suite que les relations de commutation diffèrent si $c < \infty$ de celles d'Heisenberg, faisant intervenir au lieu de l'opérateur identique l'opérateur $\langle D\rangle = (1- \frac{\Delta}{4\pi^2 c^2})^{\frac{1}{2}}$; également, la considération des opérateurs "de rotation " $R_{jk} = (2i\pi)^{-1}(x_j \frac{\partial}{\partial x_k} - x_k \frac{\partial}{\partial x_j})$ est inévitable.

Qu'il s'agisse du calcul de Weyl ou du calcul de Klein-Gordon, ce qui précède est trop vague : il faut préciser ce que les opérateurs q_j et p_j ont de particulier à l'égard de ce calcul. Les opérateurs agissant sur des fonctions définies sur $\mathbb{R}^n$ ont des symboles (ce sont, pour les physiciens, les observables classiques) qui sont des fonctions sur $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Il n'existe, c'est bien connu, aucun calcul général des opérateurs possédant la propriété que le symbole de tout commutateur AB-BA ne soit autre que le crochet de Poisson des symboles respectifs des opérateurs A et B. En revanche, le calcul de Klein-Gordon, comme celui de Weyl, est non pas caractérisé, mais très fortement contraint par le fait que la propriété que nous venons de mentionner est exacte toutes les fois que l'opérateur A (ou B, cela revient au même) coïncide avec l'un des opérateurs q_j et p_j : il s'agit là, sous sa forme infinitésimale, d'un fait de covariance.

Dans le cas relativiste, l'opérateur q_j peut paraître bizarre : il ne l'est plus si, au lieu des fonctions u sur $\mathbb{R}^n$, on fixe son attention sur les fonctions $\tilde{u} = \tilde{u}(t,\vec{x})$ sur $\mathbb{R}^{n+1}$ qui sont solutions de l'équation de Klein-Gordon

$$(2i\pi)^{-1} \frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} = c^2 (1- \frac{\Delta}{4\pi^2 c^2})^{\frac{1}{2}} \tilde{u} \tag{0.1}$$

et que, grâce à cette équation d'évolution, on identifie une telle fonction à sa restriction à $t = 0$; en effet l'opérateur q_j s'identifie alors à l'opérateur différentiel

$$q_j = (2i\pi)^{-1}[c^{-2}x_j \frac{\partial}{\partial t} + t \frac{\partial}{\partial x_j}] \ , \tag{0.2}$$

lequel, on le voit facilement, opère sur les solutions de (0.1). L'importance de cet opérateur vient de ce que c'est l'un des générateurs infinitésimaux de la représentation de Bargmann-Wigner dont il sera question plus loin, à savoir celui qui correspond au groupe de transformations "spéciales" de Lorentz dont la formule se trouve dans tous les ouvrages élémentaires sur la relativité restreinte. L'essentiel de la construction du calcul de Klein-Gordon tient dans l'utilisation de l'équation de champ (0.1) pour prolonger les fonctions sur l'espace en fonctions particulières sur l'espace-temps. On pourrait, disons-le tout de suite, se servir au lieu de (0.1) de l'équation de Schrödinger libre pour effectuer ce prolongement : ce n'est pas, alors, le calcul symbolique de Klein-Gordon que l'on obtiendrait, mais le calcul de Weyl.

L'une des ambitions de la méthode de quantification proposée ici est du reste de permettre un calcul des observables liées aux particules (libres, ou bien dans des champs possédant de hauts degrés de symétrie) d'une espèce particulière, caractérisée par l'équation de champ associée. C'est ainsi que l'on peut concevoir un calcul de Schrödinger (c'est exactement celui de Weyl), de Klein-Gordon, de Dirac... Ici, il s'agit de particules relativistes massives sans spin : d'après Feynman ([9],p.37), les mésons π sont de tels objets. L'équation (0.1) se distingue de l'équation $\Box\tilde{u} = -4\pi^2c^2\tilde{u}$, aussi appelée équation de Klein-Gordon, en ce que seules les énergies positives sont considérées : sinon, il faut introduire également l'antiparticule, mais on s'en passera à une exception peu importante près (dans la section 15). Les analogies entre la relation du calcul de Klein-Gordon à l'équation du même nom d'une part, la relation du calcul de Weyl à l'équation de Schrödinger d'autre part, ne sont à aucun endroit mises en défaut.

Un autre fait capital est que, lorsque c tend vers l'infini, non seulement l'opérateur q_j tend vers son analogue non-relativiste, mais de plus toute l'analyse de Klein-Gordon se contracte vers celle de Weyl. L'importance du fait analogue relatif à la mécanique classique a été maintes fois souligné. Par ailleurs, cette observation permet quelques vérifications spectaculaires : en effet, il est plaisant de voir que certaines formules, assez compliquées, de l'analyse de Klein-Gordon, perdent tout leur exotisme à la limite non-relativiste. Ces considérations sont reléguées à la section 16. Nous avons choisi, pour des raisons essentiellement typographiques, de fixer dans le reste du volume des unités de vitesse et d'action telles que $c = h = 1$, et choisi également la masse de la particule observée comme unité.

Le calcul symbolique de Klein-Gordon a été initialement introduit dans [37], comme sous-produit de l'analyse sur le cône de lumière solide [36]: cette dernière était elle-même le fruit d'une assez longue évolution, issue d'une proposition en vue d'une théorie générale de la quantification des espaces hermitiens symétriques [33]. Bien des efforts, et près de trois ans, ont été nécessaires pour passer d'une définition du calcul de Klein-Gordon à la théorie utilisable présentée ici. La construction même du calcul est, pensons-nous, plus attrayante telle qu'elle est exposée ici : en voici les grandes lignes.

CONSTRUCTION DU CALCUL DE KLEIN-GORDON

Partons d'une définition axiomatique de l'espace-temps de Minkowski $\mathbb{M}_{n+1}$: c'est un espace affine de dimension n+1 muni d'un ds^2 à un carré positif et n carrés négatifs. Les automorphismes de cette structure constituent le groupe de Poincaré $\mathcal{P}$. Un observateur ω est la structure additionnelle qui doue $\mathbb{M}_{n+1}$ d'une origine, et le sépare en la somme directe de deux sous-espaces T et E de dimensions 1 et n respectivement, chacun étant muni en outre d'une orientation, de telle sorte que T et E soient orthogonaux, et que ds^2 soit positif sur T, et négatif sur E. Pour des raisons d'orientation, il y a quatre sortes d'observateurs : on n'en retient qu'une. Consultant le chapitre CPT de n'importe quel livre sur la théorie des champs (par exemple Bogolubov, Logunov et Todorov [3]), l'observateur ω possède une conception de la symétrie spatiale P : celle-ci lui est cependant personnelle et sera donc notée P_ω ; deux observateurs seront déclarés équivalents si leurs opérateurs de symétrie spatiale coïncident.

Fixons un observateur de référence, ce qui permet d'identifier l'espace-temps à $\mathbb{R}^{n+1}$: on note, conformément à un usage en physique, $x = (t,\vec{x})$ ou $x = (x_o,\vec{x})$ les points de l'espace-temps ; cette convention est commode pour le lecteur, à défaut de l'être pour le typographe. Le dual de $\mathbb{R}^{n+1}$ est l'espace des covecteurs d'énergie-impulsion $p = (p_o, \vec{p})$. On s'intéresse à une particule libre de masse 1, ce qui revient à dire, au sens de la mécanique classique (relativiste) que $p \in \mathcal{M}$, feuillet d'hyperboloïde d'équation $p_o = (1+|\vec{p}|^2)^{\frac{1}{2}}$, encore appelé (abusivement) hyperboloïde de masse. L'application $v \longmapsto (1-|v|^2)^{-\frac{1}{2}}(1,-v)$ identifie la boule des vitesses ($|v| < c = 1$) à $\mathcal{M}$. La ligne d'univers d'une particule de masse 1 et de vitesse v est une droite dans l'espace-temps, de vecteur directeur $(1,v)$ ou encore $(p_o, -\vec{p})$. L'espace des états, au sens de la mécanique classique, d'une particule libre de masse 1 , est l'espace Ω constitué des couples $(x;p) = (t,\vec{x};p)$ tels que $p \in \mathcal{M}$. Cet espace est pour nous l'espace de phase. Il est élémentaire, mais au fond tout à fait remarquable, qu'il s'identifie de façon naturelle à l'espace des observateurs dont il a été question plus haut. Sous cette identification, les observateurs attachés à $(x;p)$ et $(y;q)$ sont équivalents si et seulement si $q = p$ et que, de plus, x et y appartiennent à la même ligne d'univers de vecteur directeur $(p_o, -\vec{p})$. Par définition, les symboles, ou encore symboles admissibles, sont les fonctions sur Ω qui prennent les mêmes valeurs en deux points équivalents : bien que Ω soit une variété de dimension 2n+1, les symboles peuvent être identifiés, quoique de façon non canonique, à l'espace des fonctions sur une variété de dimension 2n, par exemple $\{0\} \times \mathbb{R}^n \times \mathcal{M}$; il faut résister à l'envie d'effectuer une telle identification chaque fois que l'action du groupe de Lorentz sur les symboles est en jeu, parce que les transformations de Lorentz ne conservent pas l'espace $\{0\} \times \mathbb{R}^n$ constitué des vecteurs qui sont purement spatiaux du point de vue de l'observateur de référence.

L'application qui à une fonction $u = u(\vec{x})$ sur $\mathbb{R}^n$ associe la fonction $\mathcal{G}u$ sur l'hyperboloïde de masse définie par $(\mathcal{G}u)(p) = p_o \hat{u}(\vec{p})$, où $\hat{u}$ est la transformée de Fourier de u, constitue une isométrie de l'espace de Sobolev $H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^n)$ sur l'espace $L^2(\mathcal{M}; p_o^{-1} d\vec{p})$; l'application $\mathcal{G}$ fournit en outre une formule commode pour prolonger u, définie sur $\mathbb{R}^n$, en une fonction $\tilde{u}$ sur l'espace-temps solution de (0.1). L'espace $L^2(\mathcal{M}; p_o^{-1} d\vec{p})$ est, classiquement (voir Bogolubov-Logunov-Todorov [3] ou bien Reed-Simon [28]), l'espace à une particule de la théorie du champ libre. Qu'il soit bien clair que, pour le moment tout au moins, nos présentes investigations n'ont rien à voir avec la théorie des champs même si, aux énergies où les effets relativistes sont appréciables, les créations et annihilations de particules sont, du point de vue de la physique, les aspects les plus intéressants. Le groupe de Lorentz opère de façon naturelle sur l'espace $L^2(\mathfrak{M}; p_o^{-1}d\vec{p})$, et le groupe des translations purement spatiales opère naturellement sur $H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^n)$: cependant, si l'on veut voir clairement la représentation, due à Wigner et Bargmann, du groupe de Poincaré (orthochrone) sur l'un de ces deux espaces (identifiés au moyen de $\mathcal{G}$), il est préférable de définir celle-ci sur les fonctions définies sur l'espace-temps, au moyen de la formule

$$(0.3) \qquad (U(M,a)\tilde{u})(x) = \tilde{u}(M^{-1}(x-a)) \ :$$

dans cette formule (M,a) est un élément du groupe de Poincaré, c'est-à-dire, par référence à la décomposition de ce groupe en un produit semi-direct, le couple constitué d'une transformation de Lorentz M et d'un vecteur $a \in \mathbb{R}^{n+1}$. C'est l'une des caractéristiques du calcul de Klein-Gordon que, pour bien voir les actions de groupe, il faut passer dans l'espace-temps, c'est-à-dire prolonger u en $\tilde{u}$, solution de l'équation d'évolution (0.1) : de même, il faut regarder les symboles comme des fonctions sur $\mathbb{R}^{n+1} \times \mathfrak{M}$, bien que la condition d'admissibilité, traduite par exemple par l'équation différentielle

$$(0.4) \qquad p_o \frac{\partial g}{\partial x_o} = \sum_{j \geq 1} p_j \frac{\partial g}{\partial x_j} \ ,$$

permette d'identifier un symbole g à sa restriction à $\{0\} \times \mathbb{R}^n \times \mathfrak{M}$. En revanche, pour comprendre la structure hilbertienne de l'espace $H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^n)$, il faut considérer u et non $\tilde{u}$; également, les espaces utiles de symboles seront définis par des conditions (des majorations sur les dérivées) portant sur leur restriction à $t = 0$. Tout ceci ne présente pas de difficulté, mais nécessite un peu d'entraînement.

La définition fondamentale du calcul de Klein-Gordon est celle de l'opérateur de parité

$$(0.5) \qquad \sigma_\omega = U(P_\omega)$$

associé, au moyen de la représentation de Bargmann-Wigner U définie en (0.3), à la symétrie spatiale P_ω attachée à un observateur ω : c'est un opérateur à la fois unitaire et autoadjoint sur $H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^n)$ et, bien entendu, ce texte en donnera une représentation intégrale plus concrète. Si A est un opérateur linéaire à trace sur l'espace $H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^n)$,