P. GABRIEL
M. LEMANCZYK
P. LIARDET

Ensemble d'invariants pour les produits croisés de Anzai

Mémoires de la S. M. F. 2e série, tome 47 (1991)
<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1991_2_47__1_0>

INTRODUCTION

L'objet principal de ce travail est l'étude des produits croisés introduits par Anzai [An], c'est-à-dire les transformations $T_\varphi : (x,y) \mapsto (x+\alpha, y+\varphi(x))$ définies sur $\mathbf{X}^2$ où $\mathbf{X}$ est le tore $\mathbf{R}/\mathbf{Z}$ de dimension 1 muni de sa mesure de Haar μ, où $x \mapsto x+\alpha$ est une rotation irrationnelle sur $\mathbf{X}$ et φ une application mesurable, appelée *cocycle,* de $\mathbf{X}$ dans lui-même. Le problème de coalescence de ces produits est étudié dans [Le–Li] et plus récemment dans [Kw–Le–Ru]. Il s'agit de déterminer si toute transformation de $\mathbf{X}^2$ (mesurable, conservant la mesure de Haar) qui commute avec T_φ est inversible (cas coalescent). Bien que des exemples de produits de Anzai non coalescents soient construits dans [Le–Li], il apparaît que la propriété de coalescence soit la règle. C'est le cas des cocycles uniformément lipschitziens de degré d'enlacement non nul, étudiés dans [Fü 1], [Le–Li]. C'est aussi le cas de certains cocycles en escalier [Le–Li]. Nous présentons ici une classe plus large de cocycles donnant des extensions coalescentes et nous étudions le problème de coalescence pour les auto-couplages infinis. L'article est divisé en deux parties.

Dans la première partie, la section 1 fait l'analyse d'un ensemble d'invariants pour les classes d'isomorphie. Le premier d'entre eux est un semi-groupe mesurable de $\mathbf{X}$, représentatif de l'ensemble de tous les endomorphismes des produits directs $T_\varphi \times \tau$ où τ parcourt les rotations du cercle. Les invariants suivants traduisent des propriétés spectrales de l'isométrie associée à T_φ dans l'espace $L^2(\mathbf{X}^2)$. Le plus important est le nombre $S_\varphi(T) := \limsup_{q\alpha\to 0} |\widehat{\nu}(q)|$ où $\widehat{\nu}$ est la transformée de Fourier de la mesure spectrale ν associée au caractère $(x,y) \mapsto \exp(2\pi iy)$. Les deuxième, troisième et quatrième sections sont consacrées aux cocycles φ absolument continus.

Lorsque φ est de degré topologique nul, il peut se définir comme la réduction modulo 1 d'une application $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ continue, périodique de période 1. Les propriétés fines de régularité de distribution de la suite $n \mapsto n\alpha$ jouent ici un rôle de premier plan. Elles permettent de montrer que si f est absolument continue et $\int_0^1 f(t)dt = 0$, alors la suite des applications $f^{(q)} := f + f\circ T + \cdots + f\circ T^{q-1}$ converge uniformément vers 0 quand q parcourt la suite des dénominateurs des convergents de α. Lorsque f est de classe $\mathcal{C}^{1+\delta}$, $0 < \delta < 1$, nous déduisons de cette étude que f est un cobord additif pour un ensemble de nombres irrationnels α de mesure 1, généralisant un résultat de [He–La]. Toujours pour φ de degré topologique 0, quelle que soit la rotation ergodique $T : x \mapsto x + \alpha$, la transformation T_φ est rigide, de type spectral maximal singulier et plus précisément de Dirichlet.

Lorsque le cocycle φ (absolument continu) est de degré topologique non nul, il est ergodique pour toutes les rotations irrationnelles T. Ceci généralise un résultat de H. Fürstenberg [Fü 1] sur les cocycles uniformément lipschitziens de degré non nul pour lesquels nous obtenons $S_\varphi(T) < 1$. Notre méthode consiste à montrer que, pour cette classe de cocycles, il existe un *temps mélangeant* dans l'orthocomplément du sous-espace engendré par la rotation. De plus, aucune de ces extensions ne peut être spectralement isomorphe à une quelconque extension donnée par un cocycle (absolument continu) de degré nul. Nous calculons les invariants introduits dans la première section. Nous sommes aussi en mesure d'affirmer que la construction d'extensions non coalescentes dans [Le–Li] ne peut pas être réalisée, à un isomorphisme près, par des cocycles absolument continus, quel que soit le degré. De manière plus précise, on ne peut pas modifier le cocycle non coalescent construit dans [Le–Li] par un cobord mesurable f (*i.e.*, de la forme $f : x \mapsto g(x+\alpha) - g(x)$, g mesurable), pour obtenir un cocycle $\varphi + f$ absolument continu. Nous rappelons à cet effet que suivant un résultat de [Ko] (voir aussi [Ru 2]), la classe de cohomologie de tout cocycle contient un cocycle continu.

La dernière section porte sur les cocycles en escalier. Les invariants introduits permettent de montrer que les cocycles absolument continus et les cocycles en escalier appartiennent à des classes distinctes de cohomologie. Les propriétés spectrales dépendent des propriétés d'approximations diophantiennes de la rotation. On donne une condition simple entre α et un cocycle en escalier φ pour que celui-ci ne soit pas un cobord. Lorsque α est à quotients partiels bornés, un renforcement de la condition précédente entraîne que T_φ n'est pas rigide et les rotations qui se relèvent dans le commutant de T_φ ont un ordre, modulo $\mathbb{Z}\alpha$, borné. Lorsque α admet un développement en fraction continue à quotients partiels non bornés alors le type spectral maximal de T_φ est une mesure de Dirichlet (ce qui généralise un résultat de Anzai [An]).

Dans la seconde partie, nous examinons l'ensemble des auto-couplages infinis pour les produits de Anzai. Notre but est de démontrer que la méthode de construction de produits de Anzai non coalescents présentée dans [Le–Li] est essentiellement différente des autres méthodes connues. Le problème que nous avons à l'esprit (posé par Ya. G. Sinai [Si] en 1963) est de déterminer des transformations faiblement isomorphes qui ne soient pas isomorphes. Les constructions de "machines à exemples", données dans [Ru], [Th], [Ju-Ru], [Le 1], [Ga-Le-Me], [Le 2], consistent à déterminer un automorphisme ergodique τ ayant la propriété suivante :

(FI) *Il existe deux auto-couplages infinis ergodiques de τ qui déterminent des systèmes dynamiques faiblement isomorphes mais non isomorphes.*

Récemment, A. del Junco et Lemańczyk [Ju–Le] ont montré que la propriété (FI) est générique.

Une première question naturelle se pose :

Question 1 : Un automorphisme ergodique à spectre partiellement continu possède-t-il la propriété (FI) ?

La section 1 de cette deuxième partie apporte une réponse négative sous la forme suivante : tout auto-couplage d'un automorphisme quasi-discret est coalescent. Cependant, on peut construire des extensions de Anzai admettant un auto-couplage infini non coalescent mais dont un facteur naturel est quasi-discret.

Les sections suivantes ont pour point de départ une autre question naturelle lié à (FI) :

Question 2 : Un automorphisme ergodique non coalescent peut-il se représenter comme un auto-couplage $\infty-$essentiel (voir définition à la section 0.2) ?

Ici encore, la réponse est négative. Elle fournit l'occasion d'introduire deux invariants nouveaux $\mathbf{jd}(\tau)$ et $\mathbf{chl}(\tau)$ liés à la possibilité de représenter l'automorphisme ergodique τ comme un auto-couplage d'un de ses facteurs stricts. Nous examinons ici le cas des produits croisés ergodiques $\tau_\varphi : \Gamma \times G \to \Gamma \times G$, extensions d'une rotation $\tau : \Gamma \to \Gamma$ (Γ, G groupes abéliens, métrisables, compacts). Cette étude fait appel à la correspondance univoque entre les facteurs $\mathcal{E}$ de τ_φ et les couples de groupes compacts $(H(\mathcal{E}), \mathcal{H}_{\varphi,H}(\mathcal{E}))$ où $H(\mathcal{E})$ est un sous-groupe de G et $\mathcal{H}_{\varphi,H}(\mathcal{E})$ un sous-groupe dans le commutant du facteur naturel $\tau_{\varphi_{H(\mathcal{E})}}$ déterminé par le passage au quotient $\Gamma \times G \to \Gamma \times (G/H(\mathcal{E}))$. Cette correspondance a été étudiée notamment dans [Ve], [Ju–Ru] et [Le-Me]. Elle est reprise dans la section 2 et améliorée. Une première application (section 3) est donnée dans le cas d'extensions τ_φ dont les facteurs naturels sont deux-à-deux non isomorphes. Lorsque les groupes Γ et G sont de la forme $\mathbf{X}^d \times F$, où F est un groupe abélien fini, on obtient comme autre application (section 4) que toute chaîne croissante de facteurs de τ_φ est stationnaire. La dernière section est consacrée au calcul de ces invariants pour les extensions de Anzai déterminées par des cocycles absolument continus ou en escalier. Le sous-groupe des points de torsion dans le commutant joue un rôle essentiel.

Ce mémoire a été préparé au cours de la visite du troisième auteur à l'Université Copernicus de Toruń en Mai 1989 et s'est poursuivi pendant le séjour du second auteur à l'Université de Bourgogne à Dijon, en septembre 1989 puis à l'Université de Provence en janvier - février 1990. Les auteurs sont reconnaissants à F. Parreau pour leur avoir signalé une erreur de démonstration et remercient le Referee pour ses corrections et suggestions qui ont permis d'améliorer l'ensemble de ce travail.

PREMIÈRE PARTIE

0.1. NOTATIONS ET RAPPELS

Commutant et automorphismes coalescents

Soit $\tau : \mathcal{Y} \to \mathcal{Y}$ un automorphisme d'un espace de Lebesgue $\mathcal{Y} := (Y, \mathcal{C}, \nu)$. Le *commutant* de τ est, par définition, le semi-groupe des endomorphismes de τ, *i.e.,* des transformations $\mathcal{C}$−mesurables $S : Y \to Y$, qui commutent avec τ et préservent la mesure ν. Le commutant de τ, noté $C(\tau)$, sera muni de la *topologie faible* des transformations qui en fait un semi-groupe métrisable séparable complet. La convergence d'une suite $(S_n)_n$ vers S pour cette topologie étant définie par

$$\forall\, A \in \mathcal{C}\,,\ \lim_{n \to +\infty} \nu(S_n^{-1} A \Delta S^{-1} A) = 0.$$

L'ensemble des éléments inversibles de $C(\tau)$ forme un groupe noté $C_1(\tau)$. En suivant [Ha–Pa] et [Ne 1], τ est dit *coalescent* si $C_1(\tau) = C(\tau)$. Un automorphisme τ_1 d'un espace de Lebesgue $\mathcal{Y}_1 = (Y_1, \mathcal{C}_1, \nu_1)$ est appelé un *facteur* de τ suivant une application mesurable $f : \mathcal{Y} \to \mathcal{Y}_1$ si $\tau_1 \circ f = f \circ \tau$ et $\nu_1 = \nu \circ f^{-1}$. Le facteur τ_1 s'identifie avec la sous-σ−algèbre τ−invariante $\mathcal{E} := f^{-1}(\mathcal{C}_1)$ et se note encore $\tau_{\mathcal{E}}$. Les automorphismes τ et τ_1 sont dits *isomorphes* si, dans la définition précédente de facteur, on peut trouver f inversible (d'inverse mesurable).

Remarque 0.1. Les égalités ou relations entre ensembles, fonctions, transformations et σ−algèbres sont supposées vérifiées en dehors d'ensembles de mesure nulle (la mesure en question étant déterminée par le contexte).

Remarque 0.2. Notons que τ est coalescent si et seulement si aucun facteur $\tau_{\mathcal{E}}$ n'est isomorphe à τ dès que $\mathcal{E}$ est une sous-σ–algèbre invariante distincte de $\mathcal{C}$. Il en résulte donc :

(0.1) *Si τ est coalescent, alors tout facteur faiblement isomorphe à τ est en fait isomorphe à τ.*

Type spectral, temps rigide et temps mélangeant

Un automorphisme τ de $(Y, \mathcal{C}, \nu)$ induit un opérateur unitaire $\mathcal{U}_\tau : f \mapsto f \circ \tau$ sur $L^2(Y, \nu)$ (de produit scalaire noté $(\cdot|\cdot)$). Soit $L^2_0(Y, \nu)$ le sous-espace orthogonal à l'espace des constantes. A toute application $f : Y \to \mathbf{C}$ dans $L^2_0(Y, \nu)$ nous associerons sa *mesure spectrale* σ_f définie sur le tore multiplicatif $\mathcal{S}^1$ (ou cercle) par

$$\widehat{\sigma}_f(n) := \int_{\mathcal{S}^1} z^n d\sigma_f = (\mathcal{U}_\tau^n f | f).$$

Il est bien connu qu'il existe une application $f_0 \in L^2_0(Y, \nu)$ telle que pour toute $f \in L^2_0(Y, \nu)$ on a $\sigma_{f_0} \gg \sigma_f$. Le type spectral de σ_{f_0} (*i.e.*, sa classe d'équivalence) ne dépend pas du choix de f_0, il est appelé *type spectral maximal* de τ. Le groupe des valeurs propres de $\mathcal{U}_\tau$ est noté $Sp(\tau)$.

Une suite strictement croissante d'entiers naturels $(r_k)_k$ sera dite *temps rigide* pour τ si la suite $(\tau^{r_k})_k$ converge vers l'identité pour la topologie faible. Soit E un sous-espace $\mathcal{U}_\tau$–invariant dans $L^2_0(Y, \nu)$. Nous dirons qu'une suite strictement croissante d'entiers naturels $(m_k)_k$ est un *temps mélangeant* pour τ sur E si :

$$\forall f \in E\,, \lim_{k \to +\infty} (\mathcal{U}_\tau^{m_k} f | f) = 0.$$

Rappelons qu'une mesure σ de probabilité sur le cercle de transformée de Fourier $\widehat{\sigma}$ est dite de *Dirichlet* si $\limsup_{n \to +\infty} |\widehat{\sigma}(n)| = 1$. Notons que si τ admet un temps rigide, alors son type spectral maximal est donné par une mesure de Dirichlet.

Cocycles et produits croisés

Pour tout groupe compact Γ, on note $\mathcal{B}_\Gamma$ la σ–algèbre des parties boréliennes de Γ et μ_Γ la mesure de Haar normalisée. Pour simplifier, on notera simplement $\mathcal{B}$ et μ si le contexte le permet sans ambiguïté. Soit τ :

$(\Gamma,\mathcal{B},\mu) \to (\Gamma,\mathcal{B},\mu)$ une rotation ergodique sur un groupe monothétique compact Γ ($\mu = \mu_\Gamma$ et $\mathcal{B} = \mathcal{B}_\Gamma$). La loi sur Γ sera notée additivement. Alors $C(\tau) = \{\gamma \mapsto \gamma + a\ ;\ a \in \Gamma\}$ [Ne 2]. Soit G un groupe abélien compact métrisable, de loi notée additivement. Une application mesurable $\varphi : \Gamma \to G$ sera dite un *$G-$cocycle.* On associe à φ le produit croisé $\tau_\varphi : (\Gamma\times G, \widetilde{\mathcal{B}}, \tilde{\mu}) \to (\Gamma\times G, \widetilde{\mathcal{B}}, \tilde{\mu})$ défini par

$$\tau_\varphi(\gamma, g) := (\tau\gamma, \varphi(\gamma) + g) \tag{0.2}$$

où $\widetilde{\mathcal{B}}$ est la $\sigma-$algèbre produit $\mathcal{B}\otimes\mathcal{B}_G$ et $\tilde{\mu} := \mu\otimes\mu_G$. Dans le cas particulier où $\Gamma := \mathbf{X}$ (le tore) et $G = \mathbf{X}$, on retrouve le *produit croisé de Anzai* [An].

Un $G-$cocycle φ est dit un *$\tau-$cobord* s'il existe une application mesurable $f : X \to G$ telle que $\varphi = f\circ\tau - f$. Deux $G-$cocycles φ, ψ sont dits *$\tau-$cohomologues* si leur différence est un $\tau-$cobord. Notons que si φ et ψ sont $\tau-$cohomologues, alors les produits croisés donnés par (0.2) sont isomorphes. Un $G-$cocycle φ est appelé *$\tau-$quasi-cobord* s'il existe une constante $c \in G$ et un $G-$cocycle f tels que

$$\varphi = c + f\circ T - f.$$

Toute extension en groupe de la forme (0.2) admet une famille particulière de facteurs $\widetilde{\mathcal{B}}^H$ appelés *facteurs naturels* définis pour tous les sous-groupes fermés H de G de la manière suivante :

$$\widetilde{\mathcal{B}}^H := \{\widetilde{A} \in \widetilde{\mathcal{B}}\ ;\ \forall\, h \in H\ ,\ \theta_h^{-1}(\widetilde{A}) = \widetilde{A}\}$$

où l'on a noté θ_h l'automorphisme $(\gamma, g) \mapsto (\gamma, g + h)$.

Un automorphisme (0.2) n'est pas nécessairement ergodique. Classiquement, on a ([An], [Pa 2]) :

(0.3) *τ_φ est ergodique si et seulement si pour tout caractère non trivial χ le $X-$cocycle $\chi\circ\varphi$ n'est pas un $\tau-$cobord.*

Le commutant de τ_φ

Deux $G-$cocycles φ et ψ définis sur Γ sont dits *équivalents* s'il existe S dans $C(\tau)$ et un automorphisme continu v du groupe G tels que le cocycle $\varphi\circ S - v\circ\psi$ soit un $\tau-$cobord, *i.e.,* s'il existe une application mesurable $f : \Gamma \to G$ telle que

$$\varphi\circ S - v\circ\psi = f\circ\tau - f\ .$$

Notons que dans ce cas, la transformation définie sur $\Gamma\times G$ par

$$S_{f,v}(\gamma,g) := (S\gamma, f(\gamma)+v(g)), \tag{0.4}$$

détermine un isomorphisme de τ_φ sur τ_ψ. En fait (voir [Ne 2]), si φ et ψ sont deux $G-$cocycles *ergodiques* (*i.e.*, si τ_φ et τ_ψ sont ergodiques) alors tout isomorphisme $\widetilde{S}$ de τ_φ sur τ_ψ est de la forme (0.4). En particulier, dans le cas ergodique, φ et ψ sont équivalents si et seulement si τ_φ et τ_ψ sont isomorphes. Lorsque $\varphi=\psi$ et φ ergodique, les éléments $\widetilde{S}$ du commutant de τ_φ ont été décrits dans [Ne 2]. Il sont aussi de la forme (0.4), mais cette fois-ci, $v: G\to G$ est un épimorphisme continu de groupe. Ainsi, $S_{f,v}\in C(\tau_\varphi)$ si et seulement si l'équation fonctionnelle

$$\varphi\circ S - v\circ\varphi = f\circ\tau - f \tag{0.5}$$

est satisfaite. Nous dirons que S dans $C(\tau)$ se *relève* dans le commutant $C(\tau_\varphi)$ s'il existe $f:\Gamma\to G$ mesurable et un épimorphisme continu de groupe $v: G\to G$ solutions de (0.5). Notons au passage que $S_{f,v}$ est inversible si et seulement si v est inversible.

Cocycles sur le cercle

Supposons maintenant que l'on ait une rotation irrationnelle $T: x\mapsto x+\alpha$ sur le tore $\mathbf{X}$. Dans la suite, $\mathbf{X}$ sera identifié à l'intervalle [0,1[par l'application $t\mapsto t+\mathbf{Z}$, la topologie compacte sur [0,1[étant donnée par la distance d définie par $d(u,v) := ||u-v||$ avec $||t|| := \min\{|t-m|\,;\, m\in\mathbf{Z}\}$ pour tout $t\in\mathbf{R}$. La mesure de Haar μ correspond sur [0,1[à la mesure de Lebesgue. L'identification de $\mathbf{X}$ avec [0,1[définit un ordre total sur $\mathbf{X}$. Si $v<u$ dans $\mathbf{X}$, on posera $[u,v[:=[0,v[\cup[u,1[$ (et $[u,1[=\mathbf{X}\setminus[0,u[$). Choisissons également $G=\mathbf{X}$. Un $\mathbf{X}-$cocycle $\varphi:\mathbf{X}\to\mathbf{X}$ sera alors simplement appelé *cocycle.* De même un $T-$cobord (resp. un $T-$quasi-cobord) sera dit un $\alpha-$cobord ou simplement *cobord* (resp. un $\alpha-$quasi-cobord, ou *quasi-cobord*). Les facteurs naturels de T_φ sont ici tous de la forme $T_{k\cdot\varphi}$, avec $k\in\mathbf{Z}$.

Pour tout cocycle φ et tout entier $n\geq 1$ posons

$$\varphi^{(n)} = \varphi + \varphi\circ T + \cdots + \varphi\circ T^{n-1},$$

$\varphi^{(0)} = 0$ et $\varphi^{(-n)} := -\varphi^{(n)} \circ T^{-n}$. L'application $\Phi : \mathbf{Z}\alpha \times \mathbf{X} \to \mathbf{X}$ définie par $\Phi(n \cdot \alpha, x) := \varphi^{(n)}(x)$ est un cocycle sur $\mathbf{Z}\alpha \times \mathbf{X}$ à valeurs dans $\mathbf{X}$ au sens usuel, auquel est associée la représentation unitaire $n \to \mathcal{V}_n$ de $\mathbf{Z}$ donnée par

$$\mathcal{V}_n f(\cdot) := \exp(2\pi i \Phi(n \cdot \alpha, \cdot)) f \circ T, \quad (f \in L^2(\mathbf{X}, \mu)).$$

De nombreux auteurs ont développé et généralisé cette notion (voir notamment ([Hel], [Pa 1, 2], [Sc]). Notons simplement que le relèvement mesurable d'un sous-groupe Γ de $\mathbf{X}$ dans $C(T_\varphi)$ correspond à l'extension du cocycle Φ, étudiée par Helson [Hel]. Plus précisément, si un sous-groupe mesurable Γ de $\mathbf{X}$ se relève dans $C(T_\varphi)$ suivant un homomorphisme $F : \Gamma \to C(T_\varphi)$ tel que $F(\gamma)$ soit représenté sous la forme $(x, y) \mapsto (x + \gamma, y + f_\gamma(x))$ avec $F(\alpha) = T_\varphi$ et l'application $\Psi : (\gamma, x) \mapsto f_\gamma(x)$ mesurable, alors Ψ est un cocycle sur $\Gamma \times \mathbf{X}$, extension de Φ. Réciproquement, tout cocycle $\Psi : \Gamma \times \mathbf{X} \to \mathbf{X}$ extension du cocycle Φ s'obtient de cette manière. En effet, par définition, Ψ est mesurable et vérifie la relation des cocycles

$$\Psi(\alpha + \gamma, x) = \Psi(\alpha, x) + \Psi(\gamma, x + \alpha),$$

de sorte que $F_\gamma : (x, y) \mapsto (x + \gamma, y + \Psi(\gamma, x))$ est dans $C(T_\varphi)$. L'égalité (0.5) se traduisant ici par la relation $\Phi(\alpha, x + \gamma) - \Phi(\alpha, x) = \Psi(\gamma, x + \alpha) - \Psi(\gamma, x)$ et le relèvement de Γ se faisant par $\gamma \mapsto F_\gamma$.

Les résultats suivants sont bien connus et faciles à établir :

(0.6) *Si un cocycle $\varphi : \mathbf{X} \to \mathbf{X}$ est un cobord, alors pour tout $\varepsilon > 0$ on a*

$$\lim_{\substack{n\alpha \to 0 \\ \text{mod } 1}} \mu(\{x \in X \; ; \; |\exp(2\pi i \varphi^{(n)}(x) - 1| > \varepsilon\}) = 0.$$

(0.7) *Si un cocycle $\varphi : \mathbf{X} \to \mathbf{X}$ est un quasi-cobord, alors il existe une suite $(a_n)_n$ de nombres complexes de module 1, telle que pour tout $\varepsilon > 0$ on ait*

$$\lim_{\substack{n\alpha \to 0 \\ \text{mod } 1}} \mu(\{x \in X \; ; \; |\exp(2\pi i \varphi^{(n)}(x) - a_n| > \varepsilon\}) = 0.$$