Mémoires de la S. M. F.

Marie-Claude Arnaud

Type des points fixes des difféomorphismes symplectiques de $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$

Mémoires de la S. M. F. 2e série, tome 48 (1992)

<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1992_2_48__1_0>

Société Mathématique de France
Mémoire n° 48
Supplément au bulletin de la S.M.F.
Tome 120, 1992, fascicule 1

TYPE DES POINTS FIXES DES DIFFÉOMORPHISMES SYMPLECTIQUES DE $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$

Marie-Claude ARNAUD

Résumé . – *On s'intéresse aux points fixes des difféomorphismes exacts symplectiques de classe C^r $(1 \leq r \leq \infty)$ de l'anneau de dimension 2n $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$ génériques en topologie C^r et proches en topologie C^r d'un difféomorphisme complètement intégrable faiblement monotone (toutes ces notions seront définies par la suite). Plus précisément, nous regardons quels types de points fixes apparaissent (sont-ils hyperboliques, complètement elliptiques, elliptiques×hyperboliques?).*

Nous montrons que les résultats obtenus dépendent de la torsion du difféomorphisme complètement intégrable que nous perturbons et que, curieusement, alors qu'on peut minorer la dimension elliptique des points fixes, on ne peut en général rien dire de leur dimension hyperbolique.

Nous donnons une application de ce résultat concernant les points périodiques qui s'accumulent sur un point périodique elliptique d'un difféomorphisme symplectique générique de classe C^4 d'une variété symplectique quelconque (en utilisant le théorème de Birkhoff-Lewis).

Abstract . – *We are interested in the fixed points of the exact symplectic C^r-diffeomorphisms $(1 \leq r \leq \infty)$ of the 2n-dimensional annulus $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$ which are generic in the C^r-topology and C^r-close to a completely integrable weakely monoton diffeomorphism. More precisely, we are looking at the types of this fixed points (are they hyperbolic, completely elliptic, elliptic×hyperbolic?).*

We prove that the results depend on the torsion of the completely integrable diffeomorphism which we are perturbing. We can find a lower bound of the elliptic dimensions of the fixed points, but we can say nothing in general about their elliptic dimensions.

Using the Birkhoff-Lewis' theorem, we apply this results to the periodic points accumulating on an elliptic periodic point of every generic symplectic C^4-diffeomorphism of a symplectic manifold.

Table des Matières

Je voudrais remercier Michel Herman qui m'a proposé de réfléchir sur le type des points fixes des difféomorphismes symplectiques de $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$, ce qui m'a permis d'écrire cet article qui coïncide avec le premier chapitre de ma thèse. Il m'a aussi indiqué un lemme technique qui permet de simplifier le calcul des valeurs propres des matrices symplectiques, lemme que j'ai largement utilisé tout au long de cet article. Enfin, c'est lui qui m'a montré comment voir qu'il y a accumulation de points périodiques hyperboliques au voisinage de tout point périodique elliptique d'un difféomorphisme symplectique générique de classe C^4.

Je remercie aussi Jean-Christophe Yoccoz qui est à l'origine de la partie concernant les familles à un paramètre de difféomorphismes symplectiques et qui m'a utilement conseillée pour la rédaction des résultats ici exposés.

NOTATIONS

Si A est un ensemble fini, $\mathbf{Card(A)}$ est le cardinal de A;
Si A et B sont deux ensembles tels que $B \subset A$, alors $A \backslash B = \{x \in A;\ x \notin B\}$;
Si A, B sont deux ensembles et $f : A \to B$ est une application, si $C \subset A$, alors $f_{|C}$ est la restriction de f à C;
Si A, B sont deux ensembles et $f : A \to B$ est une application, si $C \subset B$ et si $f(A) \subset C$, alors ${}_{C|}f$ est la corestriction de f à C.

$\mathbb{N}$ est l'ensemble des entiers naturels;
$\mathbb{Z}$ est l'anneau des entiers relatifs;
Si $(G, +)$ est un groupe abélien et H un sous-groupe, $\mathbf{G/H}$ désigne le quotient de G par la relation d'équivalence $\Re$ où : $(x \Re y)$ ssi $((x - y) \in H)$.

$\mathbb{R}$ est l'espace réel de dimension 1;
$|\ .\ |$ désigne la valeur absolue sur $\mathbb{R}$;
$\mathbb{R}^\mathbf{n}$ est l'espace réel de dimension n;
$\|.\|$ désigne sur $\mathbb{R}^n$ la norme euclidienne standard;
Généralement, on écrira un élément de $\mathbb{R}^n$: $\mathbf{r} = (\mathbf{r_1}, \ldots, \mathbf{r_n})$.

$[\ .\ ]$ désigne la partie entière;
$\mathbf{Sup(a, b)}$ (resp. $\mathbf{Inf(a, b)}$) désigne le réel le plus grand (resp. petit) de a et b;
$\mathbf{SupA}$ (resp. $\mathbf{InfA}$) désigne la borne supérieure (resp. inférieure) de A.

$\mathbb{C}$ est l'espace complexe de dimension 1;
$|\ .\ |$ désigne le module sur $\mathbb{C}$;
$\mathbb{C}^\mathbf{n}$ est l'espace complexe de dimension n;
$\mathbb{U}^\mathbf{1} = \{z \in \mathbb{C}; |z| = 1\}$ est l'ensemble des nombres complexes de module 1;
$\mathbf{i} \in \mathbb{C}$ est une racine de -1;
Si $z \in \mathbb{C}$, $\mathbf{Re(z)}$ désigne la partie réelle de z et $\mathbf{Im(z)}$ désigne la partie imaginaire de z.

$\mathbb{T}$ est le tore de dimension 1 i.e. $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$;

$\mathbb{T}^n$ est le tore de dimension n i.e. $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$;
Généralement, on écrira un élément de $\mathbb{T}^n$: $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)$;
Si η est une application de $\mathbb{T}^n$ vers $\mathbb{R}^n$, on notera $\mathbf{\Gamma}_\eta$ son graphe, qui est donc dans $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$;
On dira alors que η est **l'équation du tore** Γ_η.

On considère $\mathbb{R}^{2n}$ muni des coordonnées $(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n)$; un **polyanneau** de $\mathbb{R}^{2n}$ est alors un ensemble de la forme : $E = \{(p_1, \dots, p_n, q_1, \dots, q_n); \forall i \in \{1, ..., n\}, \epsilon_1^2 \leq (p_i - p_{i,0})^2 + (q_i - q_{i,0})^2 \leq \epsilon_2^2\}$ où ϵ_1, ϵ_2 sont réels et $(p_{1,0}, ..., p_{n,0}, q_{1,0}, ..., q_{n,0}) \in \mathbb{R}^{2n}$;
On considère ensuite $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$ muni des coordonnées $(\theta_1, ..., \theta_n, r_1, ... r_n)$; un **polyanneau** de $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$ est alors un ensemble de la forme : $B = \{ (\theta_1, \dots, \theta_n, r_1, \dots, r_n); \forall i \in \{1, ..., n\}, \epsilon_1 \leq |r_i - r_{i,0}| \leq \epsilon_2\}$ où ϵ_1, ϵ_2 et $r_{i,0}$ sont réels;
une **bande ouverte** de $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$ est alors un ensemble de la forme :

$$V = \{ (\theta_1, \dots, \theta_n, r_1, \dots, r_n); \forall i \in \{ 1, \dots, n\}, |r_i| \leq \epsilon \}$$

où ϵ est réel.

On travaillera dans $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$ et on notera :
d est la différentielle extèrieure, définie donc sur les formes;
"t" désignera la dualité qui a une 1-forme associe le vecteur dual pour le produit scalaire standard;
${}^t d$, défini sur les 0-formes, désignera donc le gradient pour le produit scalaire standard;
D désignera l'application linéaire tangente;
Les composantes suivant les coordonnées angulaires et radiales seront définies comme suit : $D = (\partial/\partial\theta, \partial/\partial\mathbf{r})$;
Hess signifiera hessien.

$\mathbf{M}(\mathbb{K}, \mathbf{p} \times \mathbf{q})$ où $\mathbb{K}$ est un anneau et p et q sont des entiers positifs désigne l'ensemble des matrices à coefficients dans $\mathbb{K}$ à p lignes et q colonnes;
Si $\mathbb{K}^p$ et $\mathbb{K}^q$ sont chacun munis d'une norme que nous noterons sans distinguer $||.||$, et si $M \in M(\mathbb{K}, p \times q)$, on définit : $||\mathrm{M}|| = \mathrm{Sup}\{||Mv||; ||v|| = 1\}$;
Si $M \in M(\mathbb{K}, p \times q)$, **rang(M)** est le rang de M, **Ker(M)** est son noyau, **Trace(M)** est sa trace et ${}^\mathbf{t}\mathbf{M}$ est sa transposée;
Si $M \in M(\mathbb{K}, n \times n)$, **det(M)** est le déterminant de M;
Si $M \in M(\mathbb{R}, n \times n)$, **exp(M)** est l'exponentielle de M;
I désigne la matrice identité de $M(\mathbb{R}, n \times n)$; $\mathbf{I_p}$ désignera la matrice identité de $M(\mathbb{R}, p \times p)$;
Si $S \in M(\mathbb{R}, n \times n)$ est une matrice symétrique définie positive,$\mathbf{S^{1/2}}$ désignera l'unique matrice définie positive telle que son carré est S;
$\oplus$ signifiera "somme directe", pour des matrices comme pour des espaces vectoriels;
dim désignera la dimension pour des espaces vectoriels.

On définit sur $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$ la 1-forme λ de Liouville par : $\lambda = \sum_{i=1}^{i=n} r_i.d\theta_i$;

On munit alors $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$ de la forme symplectique $\omega = -d\lambda$;
Si H est alors un hamiltonien (c'est-à-dire une application de $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$ vers $\mathbb{R}$) de classe C^1 de $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}^n$, le **champ de vecteur hamiltonien associé à H**, noté $\mathbf{X_H}$, est le champ de vecteur tel que : $dH = \omega(X_H, .)$. En particulier, en coordonnées, $X_H = (\frac{\partial H}{\partial r}, -\frac{\partial H}{\partial \theta})$

Si V est une variété de classe C^1, et si $x \in V$, $\mathbf{T_x V}$ désigne l'espace tangent en x à V et $\mathbf{TV}$ désigne l'espace tangent à V.

Si A et B sont deux variétés de classe C^r $(1 \leq r \leq \infty)$, $\mathbf{C^r(A,B)}$ désigne l'ensemble des applications de classe C^r de A vers B;
Supposons que B soit $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{T}^n$ et considérons $f \in C^r(A,B)$. Alors,
$\|\mathbf{f}\|_{\mathbf{C^0}} = \|\mathbf{f}\| = \mathrm{Sup}\{\|f(x)\|;\ x \in A\}$ et on définit :
$\|\mathbf{f}\|_{\mathbf{C^r}} = \mathrm{Sup}\{\|D^k f\|;\ 0 \leq k \leq r\}$ pour $r \neq \infty$;
On munit alors $C^r(A,B)$ de la topologie associée à cette norme si $r \neq \infty$ et $C^\infty(A,B)$ de la topologie induite par la famille de normes;
Toujours dans le cas où B est $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{T}^n$, si $f_t \in C^r(A,B)$, on aura :
$-f_t = \mathbf{o(t^k)}$ si $t^{-k}.\|f_t\|$ tend vers 0 quand t tend vers 0;
$-f_t = \mathbf{O(t^k)}$ si $t^{-k}.\|f_t\|$ est borné quand t tend vers 0;
$-f_t = \mathbf{o^{C^r}(t^k)}$ si $t^{-k}.\|f_t\|_{C^r}$ tend vers 0 quand t tend vers 0 ($r \neq \infty$);
$-f_t = \mathbf{O^{C^r}(t^k)}$ si $t^{-k}.\|f_t\|_{C^r}$ est borné quand t tend vers 0 ($r \neq \infty$);
Si de plus $f_{|V}$ désigne la restriction de f à V :
$-f_t = \mathbf{o_V(t^k)}$ si $t^{-k}.\|(f_t)_{|V}\|$ tend vers 0 quand t tend vers 0;
$-f_t = \mathbf{O_V(t^k)}$ si $t^{-k}.\|(f_t)_{|V}\|$ est borné quand t tend vers 0;
On définit de même $\mathbf{o_V^{C^r}(t^k)}$ et $\mathbf{O_V^{C^r}(t^k)}$ pour $r \neq \infty$;
De plus, si $C \subset C^r(A,B)$, $\mathbf{Adh_r(C)}$ désigne l'adhérence de C dans $C^r(A,B)$ pour la topologie précisée ci-dessus;
Si A et B sont des variétés de classe C^1 et si f et g sont dans $C^1(A,B)$, si $x \in A$, alors on écrira : $\mathbf{f \sim g}$ **en x** pour : f est équivalente à g en x. Parfois, quand il n'y aura pas d'ambiguïté, on n'écrira pas "en x".