Philippe Kerdelhué

Spectre de l'opérateur de Schrödinger magnétique avec symétrie d'ordre six

Mémoires de la S. M. F. 2e série, tome 51 (1992)

<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1992_2_51__1_0>

SUPPLÉMENT AU

BULLETIN

DE LA SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Mémoire (nouvelle série) N° 51

SPECTRE DE L'OPÉRATEUR DE SCHRÖDINGER MAGNÉTIQUE AVEC SYMÉTRIE D'ORDRE SIX

P. KERDELHUÉ

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE

Publié avec le concours du Centre National de la Recherche Scientifique

TOME 120 ANNÉE 1992

FASCICULE 4

Société Mathématique de France
Mémoire 51
Supplément au Bulletin de la S.M.F.
Tome 120, 1992, fascicule 4

Spectre de l'opérateur de Schrödinger magnétique avec symétrie d'ordre six

Philippe Kerdelhué

Résumé. On étudie l'équation de Schrödinger semi-classique en dimension deux, en présence d'un champ magnétique et d'un potentiel périodique et possédant une symétrie de rotation d'ordre six. On traite les cas dits triangulaires et hexagonaux qui sont ceux où le potentiel atteint son minimum une ou deux fois par cellule de périodicité.

On montre que la partie inférieure du spectre de ces opérateurs est le spectre d'opérateurs pseudo-différentiels à symboles périodiques dans les deux variables, qui peuvent dans certains cas favorables être étudiés comme les opérateurs de Schrödinger.

Abstract. We study the two dimensional semi-classical Schrödinger equation, with periodic magnetic field and potential in the presence of a sixfold rotational symmetry. We treat the so called triangular and hexagonal cases, which are those when the potential reaches its minimum once or twice per periodicity cell.

We show that the lower part of the Spectrum of these operators coincide with the Spectra of pseudodifferential operators which symbols are periodic in the two variables, that, in the best cases, can be studed like the Schrödinger operators.

AMS Subjects Classification (1985). 35 A 20, 35 A 35, 34 B 20, 39 A 10, 35 S 05, 81 E 15, 35 J 10

Texte reçu le 15 mai 1991
Université de Paris-Sud, Département de Mathématiques, 91 405 Orsay cedex, France

Table des Matières

0. INTRODUCTION

Ce travail est une étude semi-classique du spectre des opérateurs de Weyl $q_h = \cos x + \cos\left(\frac{x}{2} + hD\right) + \left(\frac{x}{2} - hD\right)$ agissant sur $L^2(\mathbb{R};\mathbb{C})$ par

$$q_h(u(x) = \cos xu(x) + \cos\left(\frac{x}{2} + \frac{h}{4}\right)u(x+h) + \cos\left(\frac{x}{2} - \frac{h}{4}\right)u(x-h)$$

et

$$q_h = \begin{pmatrix} 0 & 1 + e^{ix} + e^{ihD} \\ 1 + e^{-ix} + e^{-ihD} & 0 \end{pmatrix}$$

agissant sur $L^2\left(\mathbb{R};\mathbb{C}^2\right)$ par :

$$q_h\left(u_1,u_2\right)(x) = \left(\left(1+e^{ix}\right)u_2(x) + u_2(x+h), \left(1+e^{-ix}\right)u_1(x) + u_1(x-h)\right).$$

Ces opérateurs s'introduisent notamment lors de l'étude de l'équation de Schrödinger en dimension 2, en présence d'un potentiel périodique possédant une symétrie de rotation d'ordre 6 et d'un petit champ magnétique constant.

Plusieurs études de ces opérateurs ont été faites.

Claro et Wannier [Cl-Wa] ont construit un analogue du fameux papillon de Hofstadter pour l'opérateur q_h, traçant le spectre de q_h en fonction de h lorsque $\frac{h}{2\pi}$ est rationnel à dénominateur assez petit. On sait que le spectre de $q_{\frac{2\pi p}{q}}$ pour p et q entiers et premiers entre eux est formé de q bandes (intervalles de $\mathbb{R}$) qui peuvent se toucher mais pas se chevaucher. Le dessin obtenu par Claro et Wannier présente des trous dans lesquels ces auteurs étudient la densité d'états.

Récemment une prébublication de Bellissard, Kreft et Seiler [BKS] donne une étude semi-classique du spectre d'un opérateur légèrement différent de q_h pour $\frac{h}{2\pi}$ proche d'un rationnel. Ces auteurs étudient le spectre de leur opérateur près des extrémités des bandes simples de celui correspondant $h = \frac{2\pi p}{q}$.

Dans un article [Wi-Au] proche de mon travail, Wilkinson et Austin étudient un opérateur un peu plus général. Leur approche, qui n'est pas entièrement rigoureuse mathématiquement, consiste à considérer des "puits micro-locaux" dans l'espace cotangent $T^*\mathbb{R}$, interagissant par effet tunnel comme les puits de potentiel pour l'équation de Schrödinger. Ils indiquent comment l'analyse de ces interactions permet de ramener l'étude de certaines parties du spectre à celle d'un opérateur proche de celui dont on est parti, avec une nouvelle constante de Planck, et pensent qu'on peut obtenir la structure complète du spectre en réitérant indéfiniment cette procédure, ce qui est possible si $\frac{h}{2\pi}$ admet un développement en fraction continue convenable.

Dans mon travail certains résultats pressentis par ces auteurs sont démontrés rigoureusement. Ceci a été possible grâce aux techniques et aux théorèmes obtenus par Helffer et Sjöstrand dans une série d'articles sur l'équation de Harper [He-Sj]$_{4,5,6}$ et aux techniques qu'ils y ont introduites. Ces auteurs se sont intéressés à l'opérateur $\cos x + \cos hD$, d'abord dans la partie du spectre où les courbes d'énergie sont connexes ([He-Sj]$_4$), puis dans les zones de "branchement" ([He-Sj]$_6$). Dans le premier cas, suivant l'intuition de Wilkinson, ils étudient une matrice d'interaction entre les puits, dont il peuvent majorer les coefficients par des estimations de décroissance exponentielle des fonctions propres. Ils se ramènent ainsi à un opérateur pseudo-différentiel, avec une nouvelle constante de Planck. Cette opération a reçu le nom de renormalisation. Ils arrivent également à obtenir des minorations de certains coefficients de la matrice d'interaction par des constructions BKW et montrent ainsi que l'opérateur renormalisé est proche de l'opérateur de Harper, et a conservé ses symétries. L'opérateur renormalisé peut alors être étudié de la même façon. A chaque étape de la renormalisation, les zones de branchement ont été laissées de côté et font l'objet d'un étude spéciale ([He-Sj]$_6$).

J'ai adapté cette méthode aux deux opérateurs que j'étudie, en laissant de côté les zones de branchement, soit un ou deux intervalles suivant qu'on étudie l'opérateur scalaire ou le système. Pour chacun des deux opérateurs, la renormalisation conduit à chacun des deux, suivant la zone du spectre que l'on étudie. L'innovation principale de mon travail consiste en ceci : dans l'étude des zones du spectre qui conduisent après renormalization à l'opérateur scalaire, les constructions BKW n'existent plus au delà d'un point où la phase est singulière. On a alors besoin de déplacer le problème dans le complexe et d'étudier l'opérateur sur une droite $\mathbb{R} + di$, avec $d > 0$ petit.

On obtient ainsi :

Théorème 1. *Soit* $\varepsilon_0 > 0$. *Alors il existe deux constantes* C_0 *et* c_0 *telles que si* $\frac{h}{2\pi}$ *admet le développement en fraction continue* $\frac{h}{2\pi} = \cfrac{1}{q_1 + \cfrac{1}{q_2 + \cfrac{1}{q_3 + \cdots}}}$ *avec* $q_j \in \mathbf{Z}, |q_j| \geq C_0$, *on a : le plus petit intervalle fermé qui contient* $\mathrm{Sp}(q_h)$ *est de la forme* $\left[-\frac{3}{2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|q_1|}\right), 3 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|q_1|}\right)\right]$, $\mathrm{Sp}(q_h) \subset \left(\bigcup_{1\leq j\leq N_1} J_j\right) \cup I_0 \cup \left(\bigcup_{1\leq k\leq N_2} K_k\right)$ *où* I_0, *les* J_j *et les* K_k *sont des intervalles fermés de longueur non nulle, avec* $\partial I_0, \partial J_j, \partial K_k \subset \mathrm{Sp}(q_h), J_j < J_{j+1} < I_0 < K_k < K_{k+1}$. *Ces intervalles sont séparés d'au moins* $\frac{c_0}{|q_1|}$, I_0 *est de longueur* $2\varepsilon_0 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|q_1|}\right)$, *contenant* -1 *à une distance* $\mathcal{O}\left(\frac{1}{|q_1|}\right)$ *de son centre. Les bandes* J_j *et* K_k *sont de largeur* $e^{-\frac{a(j)}{|q_1|}}$ *et* $e^{-\frac{b(k)}{|q_1|}}$ *avec* $c_0 \leq a(j) \leq \frac{1}{c_0}$ *et* $c_0 \leq b(k) \leq \frac{1}{c_0}$.

Le plus petit intervalle fermé qui contient $\mathrm{Sp}(Q_h)$ *est de la forme*

$$\left[-3 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|q_1|}\right), 3 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|q_1|}\right)\right],$$

$$\mathrm{Sp}(Q_h) \subset \left(\bigcup_{M_1\leq k\leq -1} \widetilde{K}_k\right) \cup I_{-1} \cup \left(\bigcup_{1\leq j\leq M_2} \widetilde{J}_j\right) \cup I_1 \cup \left(\bigcup_{1\leq k\leq M_3} \widetilde{K}_k\right),$$

où I_{-1}, I_1 *les* $\widetilde{J}_j$ *et les* $\widetilde{K}_k$ *sont des intervalles fermés de longueur non nulle, avec*

$$\begin{gathered}\partial I_{\pm 1}, \partial \widetilde{J}_j, \partial \widetilde{K}_k \subset \mathrm{Sp}(Q_h), \widetilde{K}_{k_1 - 1} \\ < \widetilde{K}_{k_1} < I_{-1} < \widetilde{J}_j < \widetilde{J}_{j+1} < I_1 < \widetilde{K}_{k_2} < \widetilde{K}_{k_2+1}\end{gathered}$$

pour $k_1 \leq -1$ *et* $k_2 \geq 1$.

Ces intervalles sont séparés d'au moins $\frac{c_0}{|q_1|}$, $I_{\pm 1}$ *est de longueur* $2\varepsilon_0 + \mathcal{O}\left(\frac{1}{|q_1|}\right)$, *contenant* ± 1 *à une distance* $\mathcal{O}\left(\frac{1}{|q_1|}\right)$ *de son centre. Les bandes* $\widetilde{J}_j$ *et* $\widetilde{K}_k$ *sont de largeur* $e^{-\frac{a(j)}{|q_1|}}$ *et* $e^{-\frac{b(k)}{|q_1|}}$ *avec* $c_0 \leq a(j) \leq \frac{1}{c_0}$ *et* $c_0 \leq b(k) \leq \frac{1}{c_0}$.

Il existe une fonction affine ℓ_k *qui transforme* K_k *en* $\left[-\frac{3}{2}, 3\right]$ *(respectivement une fonction affine* $\widetilde{\ell}_k$ *qui transforme* $\widetilde{K}_k$ *en* $\left[-\frac{3}{2}, 3\right]$*) telle que*

$\ell_k\,(\mathrm{Sp}\,(q_h) \cap K_k)$ *(respectivement* $\widetilde{\ell}_k\left(\mathrm{Sp}\,(Q_h) \cap \widetilde{K}_k\right)$ *vérifie les mêmes conclusions que* $\mathrm{Sp}\,(q_h)$*, avec* q_1 *remplacé par* q_2*.*

Soit f_j *la fonction affine croissante qui transforme* J_j *en* $[-3,3]$ *(respectivement* $\widetilde{f}_j$ *la fonction affine croissante qui transforme* $\widetilde{J}_j$ *en* $[-3,3]$*).* $f_j\,(\mathrm{Sp}\,(q_h) \cap J_j)$ *(respectivement* $\widetilde{f}_j\left(\mathrm{Sp}\,(Q_h) \cap \widetilde{J}_j\right)$ *vérifie les mêmes conclusions que* $\mathrm{Sp}\,(Q_h)$*, avec* q_1 *remplacé par* q_2*.*

Et ainsi de suite, en remplaçant à chaque étape q_n *par* q_{n+1}*.* ∎

Comme nous l'avons déjà vu, les opérateurs que nous étudions proviennent de l'équation de Schrödinger et le théorème 1 a donc une application à l'étude de cette équation.

On considère dans $\mathbb{R}^2$ l'opérateur de Schrödinger avec champ magnétique

$$P_{t,h_0} = (h_0 D_{x_1} - tA_1(x))^2 + (h_0 D_{x_1} - tA_2(x))^2 + V(x)$$

où V et A sont analytiques.

Le champ magnétique B est donné par $B(x)dx_1 \wedge dx_2 = d(A_1(x)dx_1 + A_2(x)dx_2)$, soit $B(x) = \partial_{x_1} A_2(x) - \partial_{x_2} A_1(x)$.

On suppose que V et B sont invariants par la rotation κ de centre 0 et d'angle $\pi/3$, et par translation selon un réseau $\mathbb{Z}\nu_1 \oplus \mathbb{Z}\nu_2$, avec $\nu_1 \neq 0, \nu_2 = \kappa(v_1)$.

On traite deux cas :

Le cas triangulaire est le cas où V atteint son minimum en un seul point par cellule de périodicité. Compte-tenu des symétries que l'on s'impose, le minimum est atteint en 0.

Le cas hexagonal est celui où V atteint son minimum en deux points par cellule de périodicité. Ce minimum est alors atteint en $\frac{1}{3}(\nu_1 + \nu_2)$ et en $\frac{2}{3}(\nu_1 + \nu_2)$

On suppose que ces minima sont non dégénérés et, sans perte de généralité, qu'ils sont nuls. On considère alors la distance d_V associée à la métrique d'Agmon $V(x)dx^2$ et on suppose que les minima les plus proches pour la distance usuelle de $\mathbb{R}^2$ sont aussi les plus proches pour la distance

d_V, et que ces minima sont reliés par une unique géodésique, non dégénérée au sens de [He-Sj]$_3$.

On a alors :

Théorème 2. *Il existe un réel strictement positif $C_0(A,V)$ tel que, si $(t,h_0) \in \left[-\frac{1}{C_0}, \frac{1}{C_0}\right] \times \left[0, \frac{1}{C_0}\right]$, Φ désigne le flux de B à travers une cellule de périodicité, et $\frac{2\pi h_0}{t\Phi}$ admet le développement en fraction continue : $\frac{2\pi h_0}{t\Phi} = \frac{1}{q_0 0+\frac{1}{q_1+\frac{1}{q_2+\cdots}}}$, avec $q_j \in \mathbb{Z}, |q_j| \geq C_0, \mu(t,h_0)$ est la plus petite valeur propre de l'oscillateur harmonique $\left(h_0 D_{x_1} + \frac{t}{2}B(x_0)x_2\right)^2 + \left(h_0 D_{x_2} - \frac{t}{2}B(x_0)x_1\right)^2 + \frac{1}{2}\langle V''(x_0)x \mid x\rangle$ où x_0 est un point où V s'annule, alors : le plus petit intervalle fermé contenant $\mathrm{Sp}\,(P_{t,h_0}) \cap]-\infty, \mu(t,h) + C_0 h_0]$ est de la forme*

$$\widetilde{\mu}(t,h_0)+\rho(h_0)\left[-\frac{3}{2}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{q_1}\right)+\mathcal{O}\left(e^{-\frac{1}{C_0 h_0}}\right), 3+\mathcal{O}\left(\frac{1}{q_1}\right)+\mathcal{O}(e^{-\frac{1}{C_0 h_0}})\right]$$

si on est dans le cas triangulaire,

$$\widetilde{\mu}(t,h_0)+\rho(h_0)\left[-3+\mathcal{O}\left(\frac{1}{q_1}\right)+\mathcal{O}\left(e^{-\frac{1}{C_0 h_0}}\right), 3+\mathcal{O}\left(\frac{1}{q_1}\right)+\mathcal{O}(e^{-\frac{1}{C_0 h_0}})\right]$$

si on est dans le cas hexagonal. Dans les deux cas, $\widetilde{\mu}(t,h_0) - \mu(t,h_0) = \mathcal{O}(h_0^2)$, $\rho(h_0)$ a un développement de la forme $\rho(h_0) = h_0^{-\nu_0} a_0(h_0) e^{-\frac{S(t)}{h}}$, où $\nu_0 \in \mathbb{R}, a_0$ est un symbole analytique elliptique, $0 \leq S(t) - S \leq Ct^2, S$ étant la distance d'Agmon entre les puits les plus proches.

De plus, après une similitude, le spectre de P_{t,h_0} a la même structure que celle expliquée au théorème 1, pour l'opérateur scalaire si on est dans le cas triangulaire, pour le système si on est dans le cas hexagonal, avec $\frac{h}{2\pi} = -\frac{1}{q_1+\frac{1}{q_2+\frac{1}{q_3+\cdots}}}$, c'est-dire que h est le plus petit réel tel que $h \equiv -\frac{t\Phi}{h_0}[2\pi\mathbb{Z}]$.

Nous avons suivi le plan suivant :

Les trois premières sections traitent l'équation de Schrödinger :