MÉMOIRES DE LA S. M. F.

ÉRIC LEICHTNAM

Le problème de Cauchy ramifié linéaire pour des données à singularités algébriques

Mémoires de la S. M. F. 2e série, tome 53 (1993)

<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1993_2_53__1_0>

Société Mathématique de France
Mémoire 53
Supplément au Bulletin de la S.M.F.
Tome 121, 1993, fascicule 2.

LE PROBLÈME DE CAUCHY RAMIFIÉ LINÉAIRE POUR DES DONNÉES À SINGULARITÉS ALGÉBRIQUES

Eric LEICHTNAM

Résumé Nous étudions le problème de Cauchy Ramifié d'ordre m à caractéristiques simples lorsque les données sont algébriques et ramifiées autour d'une queue d'aronde T. Nous montrons qu'il existe m queues d'arondes caractéristiques issues de T et que le problème de Cauchy admet une (unique) solution qui est somme de m fonctions chacune étant algébrique ramifiée autour d'une des queues d'arondes caractéristiques.

Abstract. We study the Ramified Cauchy Problem of order m with simple characteristics when the Cauchy data are algebraic and ramified around a swallowtail T. We prove that there are m characteristic swallowtails containing T and that the Cauchy Problem has a (unique) solution which is the sum of m functions, each of them being algebraic ramified around one of the characteristic swallowtails.

AMS Subjects Classification : 35 A 20, 35 C 10.

Texte reçu le 4 mai 1992

Ecole Normale Supérieure, Centre de Mathématiques Appliquées, 45 rue d'Ulm, 75230 PARIS cedex 05.

Table des Matières

0. INTRODUCTION.

Nous considérons le problème de Cauchy :

$$(0.1)\qquad \begin{cases} a(x,D)u = v(x) \\ D^s_{x_0}u(x)\big|_S = u_s(x') \quad 0 \le s < m \end{cases}$$

où $a(x,D)$ désigne un opérateur différentiel linéaire d'ordre m à coefficients fonctions holomorphes de $x = (x_j)_{0\le j\le n}$ sur un voisinage ouvert de $0 \in \mathbb{C}^{n+1}$; où l'hyperplan S d'équation $x_0 = 0$ est non caractéristique pour $a(x,D)$. Posons $x' = (x_1,\ldots,x_n)$. Soit $k \in \{1,2,\ldots,n\}$, désignons par $D(x_1,x_2,\ldots,x_k)$ le discriminant de l'équation polynomiale en z :

$$(0.2)\qquad F(x,z) = z^{k+1} - x_k z^{k-1} - x_{k-1}z^{k-2}\ldots - x_2 z - x_1 = 0.$$

Posons en outre :

$$(0.3)\qquad \Delta(x_2,\ldots,x_k,z) = \Delta = \partial_z F(x,z).$$

Désignons par T l'hypersurface analytique (dite queue d'aronde) de S d'équation $D(x_1,x_2,\ldots,x_k) = 0$. Nous supposerons que chaque fonction $u_s(x')$ $(0 \le s < m)$ est holomorphe ramifiée autour de T et de la forme : $(0 \le s \le m-1)$

$$(0.4)\qquad u_s(x') = \sum_{\ell=0}^{k} P_{s,\ell}(x';D)\cdot(z^\ell(x'))$$

où $x \to z(x')$ désigne une solution holomorphe ramifiée autour de T de l'équation (0.2), où ($-w$ étant un entier naturel donné) les $P_{s,\ell}(x';D)$ sont des opérateurs différentiels linéaires d'ordre $s-w$ à coefficients holomorphes sur un voisinage ouvert de $0 \in \{x' \in \mathbb{C}^k\}$. Indiquons - à titre d'exemple - qu'en différentiant l'équation (0.2) on obtient : $\partial_{x_1} z^\ell(x') = \frac{\ell z^{\ell-1}}{\Delta}$ pour $0 \le \ell \le k$. Le second membre $v(x)$ sera précisé dans le théorème 0.2. à ce stade de la rédaction on peut supposer sans inconvénient - pour fixer les idées - que $v(x) \equiv 0$. En outre nous étudierons le problème (0.1) avec les hypothèses suivantes. Notons $a_m(x;\xi)$ le polynôme caractéristique homogène en ξ de l'opérateur $a(x,D)$; nous supposerons que $a(x,D)$ est à caractéristiques simples ce qui signifie que l'équation de degré m en ξ_0 :

$$(0.5)\qquad a_m(0;\xi_0,1,0,\ldots,0) = 0$$

possède m racines distinctes $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m$.

Posons $m = 2p + \delta$ où $\delta \in \{0,1\}$, un exemple simple de symbole $a_m(x;\xi)$ est le polynôme suivant :

$$\xi_0^\delta \prod_{j=1}^{p} (j\xi_0^2 - \xi_1^2 \ldots - \xi_n^2).$$

L'hypothèse à caractéristiques simples est en quelque sorte l'analogue holomorphe de la notion (réelle, C^∞) d'opérateurs strictement hyperbolique relativement à S. Nous rappelons la définition d'une queue d'aronde :

Définition 0.0. Une hypersurface analytique K de $\mathbb{C}^{n+1}$ définie dans un voisinage ouvert connexe U de $0 \in \mathbb{C}^{n+1}$ est appelée queue d'aronde de sommet 0 s'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ et k fonctions holomorphes sur U s'annulant en 0 $x \to g_j(x)$ $1 \le j \le k$ telles que les différentielles $dg_j(0)$ $(1 \le j \le k)$ sont linéairement indépendantes et K est définie par l'équation :

$$D(g_1(x), \ldots, g_k(x)) = 0$$

où $D(g_1, \ldots, g_k)$ désigne le discriminant de l'équation polynomiale en z :

$$z^{k+1} = g_k z^{k-1} + \ldots + g_2 z + g_1. \tag{0.6}$$

Nous définissons le conormal $N(K)$ de K comme étant l'adhérence dans $T^*U \backslash 0$ du conormal $N(K_{\text{reg}})$ de la partie lisse K_{reg} de K. Nous dirons que K est caractéristique pour $a(x, D)$ si la restriction du symbole principal $a_m(x, \xi)$ à $N(K)$ (ou $N(K_{\text{reg}})$) est identiquement nulle.

Remarque. Soit $m_0 \in U \backslash K$. considérons un germe holomorphe au point $(g_1(m_0), \ldots, g_k(m_0))$ $(X_1, \ldots, X_k) \to z(X_1, \ldots, X_k)$ solution de l'équation :

$$z^{k+1} = X_k z^{k-1} + \ldots + X_2 z + X_1$$

On peut prolonger (voir thm 3.2) holomorphiquement ce germe $z(X_1, \ldots, X_k)$ le long de tout chemin issu de $(g_1(m_0), \ldots, g_k(m_0))$ ne rencontrant pas la queue d'aronde $D(X_1, \ldots, X_k)^{-1}(0)$. Le germe en m_0 $x \to z(g_1(x), \ldots, g_k(x))$ est alors prolongeable holomorphiquement le long de tout chemin issu de m_0 et tracé dans $U \backslash K$.

Le théorème suivant affirme qu'il existe (près de $0 \in \mathbb{C}^{n+1}$) m hypersurfaces analytiques (singulières) $K^1, \ldots, K^m$ de $\mathbb{C}^{n+1}$ issues de T. caractéristiques pour $a(x, D)$. Les K^i sont des queues d'aronde de sommet 0 et

- dans un voisinage de 0 - ce sont "essentiellement" les seules hypersurfaces analytiques vérifiant ces propriétés. Notons :

$$\pi \left| \begin{array}{l} T^*\mathbb{C}^{n+1} \longrightarrow \mathbb{C}^{n+1} \\ (x,\xi) \longrightarrow x \end{array} \right.$$

la projection usuelle.

Théorème 0.1. (Avec les notations du Problème (0.1)). Soit λ_j $(1 \leq j \leq m)$ l'une des racines de l'équation (0.5). Alors :

1°. Il existe une lagrangienne holomorphe lisse homogène Λ_j définie dans un petit voisinage conique de $(0,\ldots,0;\lambda_j,1,0,\ldots,0) \in T^*\mathbb{C}^{n+1}$ et vérifiant les quatre propriétés suivantes :

a) $\pi(\Lambda_j) \cap S = T$ (dans un voisinage de 0)

b) $(0,\ldots,0;\ \lambda_j,1,0,\ldots,0) \in \Lambda_j$

c) la restriction de $a_m(x;\xi)$ à Λ_j est identiquement nulle.

d) $\{(x',\xi')/\exists\xi_0,\ (0,x';\xi_0,\xi') \in \Lambda_j\}$ est une lagrangienne holomorphe lisse incluse dans $N(T)$ (voir def 0.0) et comprenant $(0,\ldots,0;\ 1,0,\ldots,0)$.

Il existe un voisinage conique V_1 de $(0,\ldots,0;\lambda_j,1,0,\ldots,0)$ tel que toute lagrangienne incluse dans V_1 holomorphe lisse homogène vérifiant ces quatre propriétés coïncide avec Λ_j dans un petit voisinage conique de $(0,\ldots,0;$ $\lambda_j,1,0,\ldots,0)$. Par ailleurs on peut construire Λ_j de sorte qu'il existe k fonctions $x \longrightarrow g_\ell^j(x)$ $(1 \leq \ell \leq k)$ définies et holomorphes sur un voisinage ouvert Ω de $0 \in \mathbb{C}^{n+1}$ telles que $g_\ell^j(0,x') = x_\ell$ $(1 \leq \ell \leq k)$, que l'hypersurface $K^j = \pi(\Lambda_j) \cap \Omega$ soit une queue d'aronde caractéristique définie par l'équation $D(g_1^j,\ldots,g_k^j)(x) = 0$ où $D(g_1^j,\ldots,g_k^j)$ désigne le discriminant de l'équation polynomiale en z :

$$(0.7)_j \qquad z^{k+1} = g_k^j(x)z^{k-1} + \ldots + g_2^j(x)z + g_1^j(x),$$

et que Λ_j et le conormal $N(K^j)$ coïncident au-dessus d'un petit voisinage ouvert de l'origine. En particulier $(0,\ldots,0;\lambda_j,1,0,\ldots,0)$ appartient à $N(K^j)$.

2°. Soit $\mathcal{A}$ une hypersurface définie dans un voisinage de $0 \in \mathbb{C}^{n+1}$ par une équation analytique $f(x_0,x') = 0$ telle que $\mathcal{A} \cap S = T$ (près de 0), $a_m(x;\xi)$ s'annule sur le conormal de la partie lisse $\mathcal{A}_{\text{reg}}$ de $\mathcal{A}$ et que $f(x_0,x')$ induise un germe *irréductible* en 0 (c'est le cas si $f(0,x') = D(x_1,\ldots,x_k)$). Alors $\exists j \in \{1,\ldots,m\}$ tel que $\mathcal{A}$ et $\pi(\Lambda_j) = K^j$ coincident dans un petit voisinage de 0.

Remarque. 1°) Le conormal à la queue d'aronde T *n'a qu'une seule* direction au-dessus de l'origine. Ce fait crucial et l'hypothèse faite sur l'équation (0.5) permettent (par la géométrie symplectique complexe) de construire $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_m$ et donc $K^1 = \pi(\Lambda_1), \ldots, K^m = \pi(\Lambda_m)$.

2°) La version initiale du 2°) du théorème 0.1 imposait une condition un peu plus forte sur $\mathcal{A}$; je remercie J.-M. Delort de m'avoir indiqué comment on pouvait se contenter de supposer $\mathcal{A}$ irréductible en 0.

L'un des résultats principaux de cet article est le théorème suivant :

Théorème 0.2 (Avec les notations précédentes). Soient $-w$ un entier naturel et U [resp. W] un voisinage ouvert de l'origine dans $\mathbb{C}^{n+1}$ [resp. $\mathbb{C}^n$]. Alors il existe un voisinage ouvert V (inclus dans U) de $0 \in \mathbb{C}^{n+1}$ vérifiant $V \cap S \subset W$ et tel que pour tous opérateurs différentiels linéaires $P_{s,\ell}(x'; D'_x)$ d'ordre inférieur ou égal à $s - w$ (où $0 \leq s \leq m-1$ et $0 \leq \ell \leq k$) à coefficients holomorphes sur W, pour tous opérateurs différentiels linéaires $Q_{j,\ell}(x; D_x)$ d'ordre inférieur ou égal à $-w + m - 1$ (où $1 \leq j \leq m$ et $0 \leq \ell \leq k$) à coefficients holomorphes sur U, pour tout point $x^0 = (0, x'^0)$ de $S \cap V \backslash T$ et tout germe holomorphe en x'^0 $x' \to z(x')$ solution de l'équation (0.2), le problème (0.1) défini avec les données de Cauchy suivantes :

$$(0.8) \qquad \begin{aligned} u_s(x') &= \sum_{\ell=0}^{k} P_{s,\ell}(x'; D_{x'})(z^\ell(x')) \quad 0 \leq s \leq m-1 \\ v(x) &= \sum_{j=1}^{m} \sum_{\ell=0}^{k} Q_{j,\ell}(x; D_x)(z^\ell(G_j(x))) \end{aligned}$$

où $G_j(x) = (g_1^j(x), \ldots, g_k^j(x))$ admet pour solution un germe en x^0 holomorphe $u(x)$ qu'on peut prolonger holomorphiquement le long de tout chemin issu de $(0, x'^0)$ tracé dans $V \backslash \cup_{j=1}^m K^j$ et ne rencontrant pas les queues d'arondes caractéristiques $K^1, \ldots, K^m$. En outre le germe solution $u(x)$ est de la forme:

$$u(x) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{\ell=0}^{k} R_{j,\ell}(x; D_x)(z^\ell(G_j(x)))$$

où les $R_{j,\ell}(x; D_x)$ sont des opérateurs différentiels linéaires d'ordre $-w$ à coefficients holomorphes sur V

Remarque. 0°). Pour chaque j de $\{1, \ldots, m\}$ on a $G_0(0, x') = (x_1, \ldots, x_k)$.

1°). Les précisions sur les ordres des opérateurs $P_{s,\ell}, Q_{j,\ell}, R_{j,\ell}$ montrent que le théorème 0.2 précise la nature des singularités de la solution $u(x)$ en fonction des singularités et la croissance des données.

2°). La queue d'aronde T est définie dans un système de coordonnées locales $x_1, \ldots, x_k$. Si (de manière plus intrinsèque) on considère une queue d'aronde $T' \subset S$ *de sommet* 0 telle que pour tout $(0; \xi') \in N(T')\backslash 0$ l'équation $a_m(0, \ldots, 0; \xi_0, \xi') = 0$ possède m racines simples alors on obtient des résultats analogues aux théorèmes 0.1 et 0.2.

Note. En admettant le théorème géométrique 0.1, D'Agnolo et Schapira ([3]) ont démontré indépendamment une version plus faible du théorème 0.2.

Dans [15] et [16] nous avons étudié divers types de Problèmes de Cauchy Ramifié, à chaque fois nous appliquons le programme suivant (voir aussi [17]) composé de quatre points :

1°). Si $u(x)$ est holomorphe ramifiée autour d'une hypersurface analytique K de $\mathbb{C}^{n+1}$, les singularités (microlocales) de u vivent dans une lagrangienne complexe de $T^*\mathbb{C}^{n+1}$: le conormal $N(K)$ de K. Lorsque K est singulière il faut préciser de quel conormal il s'agit et étudier sa géométrie.

2°). Le flot hamiltonien Φ du symbole principal $a_m(x; \xi)$ propage les singularités de $u(x)$ suivant des lagrangiennes caractéristiques (les conormaux des hypersurfaces caractéristiques sont invariants sous l'action de Φ).

3°). On considère des régions où on a une représentation de $u(x)$ (i.e. une expression explicite du revêtement sur lequel $u(x)$ devient uniforme).

4°). On résoud l'équation $a(x; D)u(x) = v(x)$ en utilisant les représentations du 3° par la méthode de l'optique géométrique. Le choix des opérateurs d'intégration et des normes (pour établir la convergence des séries) dépend de manière cruciale de la géométrie de la lagrangienne $N(K)$ considérée au point 1°).

Maintenant nous allons décrire la structure de cet article en indiquant comment nous avons appliqué ce programme.

Dans la section §9 nous montrons (z désignant une solution ramifiée de l'équation (0.2)) que les singularités de $z, z^2, \ldots, z^k$ vivent dans le conormal $N(T)$ de T, le théorème 9.1 fournit un énoncé précis. La section §8 est consacrée à l'étude de la géométrie de $N(T)$ et montre que $N(T)$ ne possède qu'une seule codirection au-dessus de l'origine : celle conormale à x_1. Comme le laisse prévoir les points 1° et 4° du programme, l'opérateur de primitivation par rapport à x_1 jouera un rôle clef.

Dans la section §2 nous prouvons le théorème 0.1. Dans le théorème 2.2 nous construisons la lagrangienne caractéristique Λ_j (conformément au point 2° du programme) en propageant par le flot Φ le lieu *caractéristique* (pour $a(x; D)$) constitué de points voisins de $(0, \ldots, 0; \lambda_j, 1, 0, \ldots 0)$ et de la