

MÉMOIRES DE LA S. M. F.

LUCIANA RAMELLA

Sur les schémas définissant les courbes rationnelles lisses de \mathbb{P}^3 ayant fibré normal et fibré tangent restreint fixés

Mémoires de la S. M. F. 2^e série, tome 54 (1993)

http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1993_2_54__1_0

© Mémoires de la S. M. F., 1993, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mémoires de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Memoires/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

**SUR LES SCHÉMAS DÉFINISSANT LES COURBES
RATIONNELLES LISSES DE P^3 AYANT FIBRÉ NORMAL
ET FIBRÉ TANGENT RESTREINT FIXÉS**

Luciana RAMELLA

RÉSUMÉ. On confronte les stratifications du schéma de Hilbert des courbes lisses rationnelles de P^3 de degré d par le fibré normal et par le fibré tangent restreint, en étudiant l'intersection des strates des deux types de stratifications. Le comportement est bizarre, il n'existe pas de symétries et il est compliqué de trouver des règles générales. Dans ce travail on trouve des paires de strates ayant intersection vide, des paires de strates ayant intersection non vide mais se coupant d'une mauvaise façon et enfin une vaste classe de paires de strates se coupant d'une bonne façon. On note que la strate générale de la stratification par le fibré normal coupe toute strate de l'autre stratification, mais on trouve qu'on n'a pas l'analogie pour la strate générale de la stratification par le fibré tangent restreint et on détermine tous les type de scindage possibles du fibré normal des courbes de cette strate. On note aussi que le fibré normal dépend des droites multisécantes.

ABSTRACT. In this paper we consider the stratifications of the Hilbert scheme of smooth rational curves in P^3 of degree d by the normal bundle and by the restricted tangent bundle and we study the intersection of such two types of stratifications. The behaviour of the stratifications is rather strange: there are no symmetries and the search for general rules is a difficult matter. In this paper we exhibit some pairs of strata having empty intersection, a few other pairs of strata having no good intersection and finally a large class of pairs of strata having a good intersection. We note that the general stratum of the stratification by the normal bundle intersects every stratum of the other stratification, but we find that there is no analogue for the general stratum of the stratification by the restricted tangent bundle and we determine the type of splitting of the normal bundle of curves in this stratum. We also note that the normal bundle depends on the multisection lines.

Classification AMS: 14 H 50 , 14 H 10 , 14 C 05 .

Texte reçu le 27 mai 1991 (I) et le 17 septembre 1992 (II), révisé le 5 juin 1992 (I).
L. RAMELLA, Dipartimento di Matematica Università, via L.B. Alberti 4, I-16132 Genova
E-mail: ramella@dima.unige.it

TABLE DES MATIÈRES

	pages
Introduction	5
Première partie: Le comportement des strates assez générales.	
§ 1.1. Stratifications.	15
§ 1.2. Fibrés sur une courbe réductible.	19
§ 1.3. Sur le fibré normal d'une courbe réductible.	23
§ 1.4. De bonnes intersections.	29
§ 1.5. Le fibré normal et les surfaces caractéristiques.	37
§ 1.6. Des intersections vides.	43
Deuxième partie: Utilisation des droites caractéristiques.	
§ 2.1. Le fibré normal de l'association d'une courbe et d'une droite.	47
§ 2.2. La courbe générale de toute strate de la stratification par le fibré normal est docile.	53
§ 2.3. Le fibré normal des courbes dont le fibré tangent restreint est de type général.	61
§ 2.4. Sur l'intersection des strates de petite dimension.	65
§ 2.5. Les courbes de degré 6 et 7.	67
Références	73

INTRODUCTION

Objet de ce travail. Nous nous intéressons à l'étude du fibré normal N_C et du fibré tangent restreint $T_{\mathbf{P}^3|_C}$ des courbes lisses rationnelles C de \mathbf{P}^3 . (\mathbf{P}^3 désigne l'espace projectif de dimension 3 sur un corps k algébriquement clos de caractéristique 0).

On considère le schéma de Hilbert $\text{Hilb}_d \mathbf{P}^3$ des courbes de \mathbf{P}^3 de degré d et ayant genre arithmétique 0. On désigne par $\mathring{\text{H}}_d$ l'ouvert de $\text{Hilb}_d \mathbf{P}^3$ constitué par les courbes lisses. On étudie la stratification du schéma $\mathring{\text{H}}_d$ par le fibré normal et celle par le fibré tangent restreint.

Maintenant on va rapporter les résultats connus sur les deux stratifications.

Une courbe lisse rationnelle C de \mathbf{P}^3 est donnée par un plongement $f : \mathbf{P}^1 \rightarrow \mathbf{P}^3$, si E est un fibré de rang r sur C , le fibré f^*E image réciproque de E par f est du type $\mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(a_1) \oplus \dots \oplus \mathcal{O}_{\mathbf{P}^1}(a_r)$, on pose $a_1 \geq \dots \geq a_r$ et on dit que la suite (a_1, \dots, a_r) est le type de scindage de E .

Si $a \in \mathbf{Z}$ on note $a^+ = \max \{ 0, a \}$, si (a_1, \dots, a_r) est une suite d'entiers on note $\delta(a_1, \dots, a_r) = \sum_{i,j} (a_i - a_j - 1)^+$.

A l'égard du fibré normal on a

Théorème 1. La strate $N(\alpha, \beta)$ des courbes C de $\mathring{\text{H}}_d$ dont le fibré $N_C(-1)$ a le type de scindage (α, β) , $\alpha + \beta = 2d - 2$, est non vide si et seulement si $\beta \geq 3$; dans ce cas elle est irréductible et de la codimension attendue, i.e. $\text{codim } N(\alpha, \beta) = \delta(\alpha, \beta)$.

Ce résultat a été démontré par Eisenbud et Van de Ven dans [EV1] et [EV2], ici ils décrivent les strates en donnant une caractérisation géométrique des courbes ayant fibré normal donné.

Ghione et Sacchiero ont étudié eux aussi, dans [fG-gS] et [gS], la stratification des courbes rationnelles (de genre géométrique 0) de \mathbf{P}^3 par le type de scindage du fibré normal ; dans Exemple 2.5 et Exemple 2.6 de [fG-gS] ils exhibent, pour tout $2 \leq \beta \leq d-1$, les équations paramétriques des courbes rationnelles C de degré d , admettant au plus des nœuds comme singularités, dont le fibré $N_C(-1)$ a le type de scindage $(2d-2-\beta, \beta)$; dans Observation 4-2 de [gS], Sacchiero énonce, sans le démontrer, que pour $\beta \geq 3$ l'Exemple 2.6 de [fG-gS] fournit en fait aussi des exemples de courbes lisses.

Quant au fibré tangent restreint on a

Théorème 2. La strate $M(a,b,c)$ des courbes C de \mathring{H}_d dont le fibré $T_{\mathbf{P}^3(-1)}|_C$ a le type de scindage (a,b,c) , $a + b + c = d$, est non vide si et seulement si $c \geq 1$; dans ce cas $M(a,b,c)$ est irréductible, lisse et de la codimension attendue $\delta(a,b,c)$.

Ce résultat a été démontré dans [IR1] en étudiant le fibré tangent restreint des courbes associations d'une courbe lisse de degré $d-1$ et d'une droite, dans [IR2] en utilisant les déformations de fibrés sur \mathbf{P}^1 et dans [fG-al-gS] en faisant usage des variétés réglées et du schéma de Hilbert des idéaux de $k[[t_0, t_1]]$. Verdier a décrit dans [V], sans démonstration, la stratification de la variété des morphismes $f: \mathbf{P}^1 \rightarrow \mathbf{P}^n$ de degré d par le type de scindage du fibré $f^*(T_{\mathbf{P}^n})$; dans [IR2] on a considéré les plongements f et on a expliqué la structure schématique des strates.

Dans la thèse de doctorat [IR1] on a cherché à voir si les strates des deux types de stratifications se coupent et de quelle façon. Sur cette question il était connu seulement le résultat suivant, qu'on trouve dans [EV1]:

Proposition 3. Le fibré normal des courbes gauches lisses rationnelles de degré d de \mathbf{P}^3 contenues dans une quadrique lisse est de type général.

On rappelle qu'une courbe gauche rationnelle C de degré d de \mathbf{P}^3 est contenue dans une quadrique lisse si et seulement si le fibré $T_{\mathbf{P}^3(-1)}|_C$ est de type de scindage $(d-2, 1, 1)$.

Ce travail contient des résultats obtenus dans la thèse de doctorat [IR1] concernant la question décrite ci-dessus.

Les résultats. Les deux stratifications se comportent d'une façon bizarre, il n'existe pas de symétries et il est compliqué de trouver des règles générales. Pour les degrés $d \leq 4$ la situation est très simple, il existe un unique type de scindage aussi bien pour le fibré tangent restreint que pour le fibré normal. Pour le degré 5 on a une (unique) intersection vide (cf. Proposition 3): $M(3,1,1) \cap N(5,3) = \emptyset$. À partir du degré 6 la situation commence à se compliquer. Dans la deuxième partie on a cherché à faire une analyse détaillée pour les courbes de degré 6 et 7, mais déjà pour le degré 7 on a laissé un problème ouvert: l'intersection $M(4,2,1) \cap N(8,4)$ est-elle vide ?

Le fibré tangent restreint et le fibré normal ne se comportent pas l'un l'autre de façon symétrique:

(Théorème 1.4.2) Le fibré normal de la courbe générale de toute strate $M(a,b,c)$ est de type général.

(Corollaire 1.6.4) Si C est une courbe générale de la strate $N(\alpha,\beta)$ de \mathring{H}_d avec $\beta \leq \frac{d+6}{4}$ alors le degré maximum des sous-fibrés inversibles de $T_{\mathbb{P}^3}(-1)|_C$ est $d - 2\beta + 2$.

L'intersection des strates assez générales des deux stratifications contient une composante irréductible de la bonne dimension:

(Théorème 1.4.6) Si $c+\beta \geq d$, les strates $M(a,b,c)$ et $N(\alpha,\beta)$ de \mathring{H}_d se coupent le long d'un sous-schéma ayant une composante irréductible de la bonne dimension.

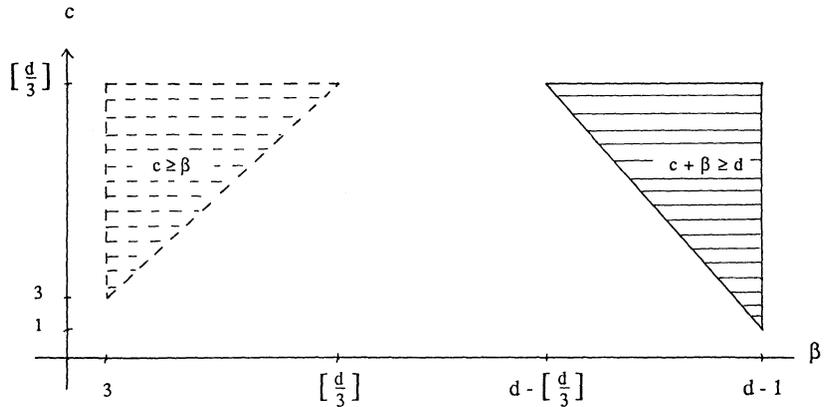
(c'est-à-dire de dimension $4d - \delta(a,b,c) - \delta(\alpha,\beta)$).

Mais pour $d \geq 8$, les strates de dimension "petite" de la stratification de $\overset{\circ}{H}_d$ par le fibré normal ne coupent pas les strates de dimension "trop haute" de la stratification par le fibré tangent restreint:

(Corollaire 1.6.5) Si $c \geq \beta$, les strates $M(a,b,c)$ et $N(\alpha,\beta)$ de $\overset{\circ}{H}_d$ ne se coupent pas.

Cela montre aussi qu'il existe des strates se coupant mais telles qu'aucune composante de l'intersection n'ait la bonne dimension.

On peut décrire les résultats principaux contenus dans la Première Partie (Théorème 1.4.6 et Corollaire 1.6.5) à l'aide de la figure suivante:



$[x]$ désigne la partie entière de x .

On rappelle qu'on a $3 \leq \beta \leq d-1$ et $1 \leq c \leq [\frac{d}{3}]$; pour la strate générale de la stratification de $\overset{\circ}{H}_d$ par le fibré normal on a $\beta = d-1$ et pour la strate générale de la stratification de $\overset{\circ}{H}_d$ par le fibré tangent restreint on a $c = [\frac{d}{3}]$.

Dans la Deuxième Partie on donne des informations sur les zones $A = \{(\beta, c) \in \mathbb{N}^2 / c = [\frac{d}{3}]\}$, $B = \{(\beta, c) \in \mathbb{N}^2 / c = 1\}$, $C = \{(\beta, c) \in \mathbb{N}^2 / \beta = 3\}$ et

$D = \{(\beta, c) \in \mathbb{N}^2 / c + \beta \geq d - 1\}$. On rappelle que les courbes de la zone B sont exactement les courbes ayant une droite (d-1)-sécante.

Quant à la zone A, on réussit à caractériser les strates $N(\alpha, \beta)$ coupant la strate générale de la stratification de \mathring{H}_d par le fibré tangent restreint:

(Théorème 2.3.2) La strate $N(\alpha, \beta)$ de \mathring{H}_d coupe la strate générale de la stratification de \mathring{H}_d par le fibré tangent restreint si et seulement si on a $\beta > \left\lceil \frac{d+1}{3} \right\rceil$ ($\lceil x \rceil$ désigne la partie entière de x).

On trouve des strates ayant une intersection vide, dans la zone B:

(Proposition 2.4.2) Une courbe rationnelle lisse C de degré $d \geq 6$ ayant une droite (d-1)-sécante n'appartient pas à la strate $N(2d-5, 3)$ de \mathring{H}_d .

En outre on détermine le type de scindage du fibré tangent restreint des courbes de la zone C:

(Proposition 2.4.3) Si $d \geq 6$, les courbes C de la strate $N(2d-5, 3)$ de \mathring{H}_d ont le fibré $T_{\mathbb{P}^3(-1)}|_C$ de type de scindage (d-4, 2, 2).

Enfin on trouve d'autres strates se coupant d'une bonne façon, dans la zone D:

(Théorème 2.5.6) Si $\beta \geq \left\lceil \frac{2d+1}{3} \right\rceil$, $b \geq \left\lceil \frac{d+1}{3} \right\rceil$ et $c \geq \left\lceil \frac{d-2}{3} \right\rceil$, alors les strates $M(a, b, c)$ et $N(\alpha, \beta)$ de \mathring{H}_d se coupent le long d'un sous-schéma ayant une composante irréductible de la bonne dimension.

Quant aux courbes de degré 5, 6 et 7 on va décrire les résultats obtenus au moyen de graphes.

Le terme (a, b, c) indique le type de scindage du fibré $T_{\mathbb{P}^3(-1)}|_C$; le couple (α, β) indique le type de scindage du fibré $N_C(-1)$; la ligne continue — entre les sommets (a, b, c) et (α, β) indique que les strates $M(a, b, c)$ et $N(\alpha, \beta)$ se coupent en bonne dimension; la ligne à traits - - -