EMMANUEL ANDRONIKOF

Microlocalisation tempérée

Mémoires de la S. M. F. 2e série, tome 57 (1994)
<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1994_2_57__1_0>

Société Mathématique de France
Mémoire 57
Supplément au Bulletin de la S.M.F.
Tome 122, 1994, fascicule 2

MICROLOCALISATION TEMPÉRÉE

Emmanuel ANDRONIKOF

Abstract - Along the lines of Sato and his school, we build the theory of tempered microlocalization of distributions and of holomorphic functions. We obtain new sheaves of microfunctions and microdifferential operators, invariant under complex canonical transformations. We apply these new tools to the study of distribution solutions of linear systems, in the systematic way that had been achieved in hyperfunction theory. Tempered microlocalization is also essential in analyzing the microlocal structure of regular $\mathcal{D}$-modules.

Résumé - Dans la ligne des idées de Sato et de son école, nous construisons la théorie de la microlocalisation tempérée des distributions et des fonctions holomorphes. On obtient de nouveaux faisceaux de microfonctions et d'opérateurs microdifférentiels invariants par les transformations canoniques complexes. On applique ces nouveaux outils aux solutions distributions des systèmes linéaires, sur le modèle systématique qui avait été réalisé en théorie des hyperfonctions. La microlocatisation tempérée est également essentielle pour analyser la structure microlocale des $\mathcal{D}$-modules réguliers.

AMS Subject Classification Index : 58 G 07

Texte reçu le 15 avril 1993
Université de Nantes. Département de Mathématiques et d'Informatique, URA CNRS 758, 2, rue de la Houssinière, F-44072 Nantes.

Table

Introduction

Depuis l'irruption des méthodes géométriques liées à la théorie des hyperfonctions pour les équations aux dérivées partielles ("l'analyse algébrique" de Sato), et leur intense développement, il était regrettable que ces mêmes méthodes ne puissent en général s'appliquer aux solutions distributions des systèmes linéaires - sauf peut-être ce qui concerne la propagation des singularités - faute de disposer d'un appareillage fonctoriel analogue à celui de l'ouvrage connu sous le nom de code SKK, mais en théorie des distributions.

Le présent article, se propose de tenter de combler cette lacune en jetant les bases d'une formulation à la SKK, d'une théorie des microfonctions tempérées, qui précise et prolonge notre travail de [An1].

Le fait qu'une telle théorie fût possible nous était devenu clair depuis l'apparition du foncteur de cohomologie modérée introduit par Kashiwara pour résoudre le problème de Riemann-Hilbert.

Tout l'exercice consiste alors à microlocaliser ce foncteur en le foncteur $T\text{–}\mu hom(\cdot, \mathcal{O})$ *; on se place d'emblée dans le cadre général de la théorie microlocale des faisceaux de Kashiwara et Schapira et on fabrique une version tempérée du foncteur* $\mu hom(\cdot, \mathcal{O})$*, à l'aide d'opérations standard de la théorie des* $\mathcal{D}$*-modules (chapitres 2 et 3).*

On obtient en particulier un nouvel anneau d'opérateurs microdifférentiels $\mathcal{E}^{\mathbb{R},f}$ *qui opère sur les microfonctions tempérées, ces dernières étant définies fonctoriellement. La possibilité de faire opérer les transformations canoniques quantifiées est certainement le coeur de l'ouvrage (chapitre 5). Les applications sont alors nombreuses, qui permettent de donner des théorèmes d'annulation et des versions pour les distributions de certaines constructions bien connues dans le cadre des hyperfonctions (chapitre 6).*

Une autre application essentielle est l'étude microlocale des modules holonômes réguliers : elle est seulement esquissée ici (cf. 5.6 et 6.3.1). Signalons que sur une variété complexe une distribution holonôme régulière a un front d'onde égal à la variété caractéristique du $\mathcal{D}$*-module qu'elle engendre (cf. [An 4]), et que, d'autre part, dans un travail en cours de rédaction on obtient une version microlocale de la correspondance de Riemann-Hilbert (cf. [An 5]).*

L'essentiel de ce travail a été réalisé alors que P. Schapira était à l'Université Paris-Nord et qu'il rédigeait avec M. Kashiwara leur impressionnante monographie [K-S 3]. C'est dire tout ce qu'il doit à ces auteurs : qu'ils trouvent ici *l'expression de notre gratitude.*

Nos remerciements vont également à Madame Catherine Simon pour la remarquable endurance typographique qu'elle a su montrer au cours de révisions successives.

0. - FORMULAIRE

On a dressé ci-dessous une liste de quelques propriétés générales et conventions d'écriture classiques sur les faisceaux coniques et les $\mathcal{D}$-Modules qui seront constamment utilisées dans la suite sans qu'il y soit explicitement fait référence à chaque fois.

0.1. - Faisceaux coniques

On renvoie à [K-S 3] pour un exposé didactique.

Soit X un espace topologique localement compact, dénombrable à l'infini. On note $D^+(X)$ (resp. $D^b(X)$) la catégorie dérivée de la catégorie des complexes de faisceaux bornés à gauche (resp. bornés) de $\mathbb{C}$-vectoriels sur X.

Soit $E \xrightarrow{\tau} X$ un fibré vectoriel.

On identifie X à la section nulle et on note i l'immersion $X \hookrightarrow E$. On pose $\overset{\circ}{E} = E \backslash X$, $\mathbb{R}_{>0} := \mathbb{R}_+ \backslash \{0\}$; on munit $E/\mathbb{R}_{>0}$ de la topologie quotient (elle est non séparée), on désigne par γ l'application canonique $\gamma : E \to E/\mathbb{R}_{>0}$, et on note $\overset{\circ}{\gamma} = \gamma|_{\overset{\circ}{E}}$.

Soit F un faisceau sur $\overset{\circ}{E}/\mathbb{R}_{>0}$. On a : $F \xrightarrow{\sim} \overset{\circ}{\gamma}_* \overset{\circ}{\gamma}^{-1} F$ et $R^j \overset{\circ}{\gamma}_* \overset{\circ}{\gamma}^{-1} F = 0$, $\forall j > 0$.

Soit maintenant F un faisceau sur E. On dit que F est *conique* s'il est constant sur les fibres de γ (il revient au même de dire $\gamma^{-1}\gamma_* F \xrightarrow{\sim} F$), et on a $R^j \overset{\circ}{\gamma}_* F = 0$, $\forall\, j > 0$.

On note Fais.coni(E) la catégorie des faisceaux coniques sur E et $D^+_{\text{coni}}(E)$ la sous-catégorie de $D^+(E)$ des objets à cohomologie dans Fais.coni(E). On a les identifications $R\tau_* F = i^{-1}F$, $R\tau_! F = i^{-1}R\Gamma_X F$ et on a un triangle distingué $R\tau_! F \to R\tau_* F \to R\mathring{\tau}_* F \xrightarrow{+1}$, où $\mathring{\tau}$ désigne $\mathring{\tau} = \tau|_{\mathring{E}}$.

Rappelons enfin quelques formules relatives à la transformation de Fourier topologique, dite encore de Fourier-Sato ([S-K-K], cf. aussi [K-K 1], [B-M-V], [Br], [K-S 3]).

Soit $E^* \xrightarrow{\pi} X$ le fibré dual.

La transformation de Fourier $F \mapsto F^\wedge$ est une équivalence de catégories

$$D^+_{\text{coni}}(E) \longrightarrow D^+_{\text{coni}}(E^*)\,,$$

et possède les propriétés suivantes.

1) Pour tout $F \in Ob\, D^+_{\text{coni}}(E)$ et tout ouvert convexe $U \in E$ (i.e. convexe dans la fibre) on a

$$R\Gamma(U; F^\wedge) \simeq R\Gamma_{U^o}(E; F)$$

où $U^o \subset E^*$ est par définition le polaire de U.

En particulier $R\Gamma(E^*; F^\wedge) \simeq R\Gamma_X(E; F)$.

2) Pour tout A fermé convexe propre de E^* on a

$$R\Gamma_A(E^*; F^\wedge) \simeq R\Gamma(\text{Int}(A^o)^a; F) \underset{\mathbb{C}}{\otimes} or_{E/X}[-\ell],$$

où ℓ est la dimension de la fibre de τ et où Int désigne l'intérieur et a l'application antipodale; on a noté $or_{E/X}$ le faisceau d'orientation relative à coefficients complexes.

3) La transformation de Fourier commute au changement de base.

4) Soit $f : E \to E'$ un morphisme de fibrés au-dessus de X, ${}^t f : E'^* \to E^*$ le morphisme dual.

On a $(Rf_! F)^\wedge \simeq ({}^t f)^{-1}(F^\wedge)$ pour $F \in Ob\, D^+_{\text{coni}}(E)$ et $(f^! G)^\wedge \simeq R({}^t f)_*(G^\wedge)$ pour $G \in Ob\, D^+_{\text{coni}}(E')$.

0.2. - $\mathcal{D}$-Modules : formulaire de Kashiwara

0.2.1. Dans tout ce qui suit on entend par variété complexe une variété analytique complexe lisse; sous-variété voudra dire sous-variété lisse, localement fermée. Soit X une variété complexe. On note $\mathcal{O}_X$ le faisceau structural, Ω_X le faisceau des formes holomorphes de degré maximum, $\mathcal{D}_X$ le faisceau des opérateurs différentiels linéaires à coefficients holomorphes sur X.

On note $\mathrm{Mod}(\mathcal{D}_X)$ la catégorie des $\mathcal{D}_X$-Modules à gauche et, pour $(*) = (), +$ ou b, on note $D^*(\mathcal{D}_X)$ la catégorie dérivée $D^*(\mathcal{D}_X) \underset{\text{def}}{=} D^*(\mathrm{Mod}(\mathcal{D}_X))$. Si $E \xrightarrow{\tau} X$ est un fibré holomorphe on définit de manière analogue $D^*(\tau^{-1}\mathcal{D}_X) = D^*(\mathrm{Mod}(\tau^{-1}(\mathcal{D}_X)))$.

Soit Z une sous-variété de X. Rappelons que

$$\mathcal{B}_{Z|X} \underset{\text{def}}{=} R\Gamma_{[Z]}\mathcal{O}_X[\dim_{\mathbb{C}} X - \dim_{\mathbb{C}} Z]$$

est concentré en degré 0, c'est le faisceau des hyperfonctions holomorphes d'ordre fini de [S-K-K] (cf. (1.2.1) pour une définition du terme de droite).

Si $f : Y \to X$ est un morphisme de variétés complexes, $\Delta \subset Y \times X$ le graphe de f, on pose :

$$\Omega_{Y/X} = \Omega_Y \underset{f^{-1}\mathcal{O}_X}{\otimes} f^{-1}\Omega_X^{\otimes -1} \qquad \text{(le faisceau des formes relatives)},$$

$$\mathcal{D}_{Y\longrightarrow X} = \mathcal{B}_{\Delta|Y\times X} \underset{\mathcal{O}_X}{\otimes} \Omega_X = \mathcal{O}_Y \underset{f^{-1}\mathcal{O}_X}{\otimes} f^{-1}\mathcal{D}_X\,,$$

$$\mathcal{D}_{X\longleftarrow Y} = \mathcal{B}_{\Delta|Y\times X} \underset{\mathcal{O}_Y}{\otimes} \Omega_Y = \mathcal{D}_{Y\longrightarrow X} \underset{\mathcal{O}_Y}{\otimes} \Omega_{Y/X} = f^{-1}\mathcal{D}_X \underset{f^{-1}\mathcal{O}_X}{\otimes} \Omega_{Y/X}\,.$$

On a $\quad \mathcal{D}_X = \mathcal{D}_{X \xrightarrow{\mathrm{Id}} X} \quad$ et $\quad \mathcal{B}_{Z|X} \simeq \mathcal{D}_{X\longleftarrow Z} \overset{L}{\underset{\mathcal{D}_Z}{\otimes}} \mathcal{O}_Z$.

Soient $f : Y \to X$ et $g : Z \to Y$ deux morphismes de variétés complexes alors :

$$\mathcal{D}_{Z\to Y} \overset{L}{\underset{g^{-1}\mathcal{D}_Y}{\otimes}} g^{-1}\mathcal{D}_{Y\to X} \simeq \mathcal{D}_{Z\to X}\,, \tag{0.2.1}$$

et

$$g^{-1}\mathcal{D}_{X\leftarrow Y} \overset{L}{\underset{g^{-1}\mathcal{D}_Y}{\otimes}} \mathcal{D}_{Y\leftarrow Z} \simeq \mathcal{D}_{X\leftarrow Z}\,, \tag{0.2.1)bis}$$