

MÉMOIRES DE LA S. M. F.

ANTOINE BOMMIER

Prolongement méromorphe de la matrice de diffusion pour les problèmes à N corps à longue portée

Mémoires de la S. M. F. 2^e série, tome 59 (1994)

http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1994_2_59__1_0

© Mémoires de la S. M. F., 1994, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mémoires de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Memoires/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

Prolongement méromorphe de la matrice de diffusion pour les problèmes à N corps à longue portée

Antoine BOMMIER

Résumé

Nous étudions certaines propriétés des matrices de diffusion 2 amas - k amas pour les problèmes à N corps à longue portée. Nous montrons en particulier, avec des hypothèses d'analyticité sur les potentiels, que l'on peut les prolonger méromorphiquement à des énergies complexes, et que leurs noyaux sont analytiques.

Abstract

We study some analytic properties of the 2 clusters k clusters Scattering Matrices for N -Body problems with long-range interactions. In particular we prove, with some hypothesis on the analyticity of the potentials, the existence of their meromorphic continuations and the analyticity of their kernels.

Classification A.M.S. (1985). 35A15, 35B37, 35J10, 35P25, 35S15, 49E15.

Texte reçu le 16 novembre 1993
Ecole Polytechnique, Centre de Mathématiques (CMAT), U.R.A. 169
91128 Palaiseau Cedex, France.

Table des matières

1. Introduction	5
1.1 Notations	7
1.1.1 Notations générales.	7
1.1.2 Notations liées au problème à N corps.	8
1.2 Hypothèses	10
1.3 La construction d'Isozaki-Kitada.	11
1.4 Définition des opérateurs d'onde et de la matrice de diffusion.	13
1.5 Résultats :	17
2. Une nouvelle construction des opérateurs d'onde.	19
2.1 Construction des opérateurs d'onde pour un canal de réaction à deux amas.	20
2.2 Démonstration de la proposition 2.4	24
2.3 Construction des opérateurs d'onde pour un canal de réaction quelconque.	36
3. Démonstration du théorème 1.9	39
3.1 Prolongement de M_1	42
3.2 Prolongement de M_2	47
4. Démonstration du théorème 1.10	55
4.1 Démonstration de (2)	56
4.2 Démonstration de (1)	57
A. Appendice : Les “boost-distorsions” et le problème à N corps.	59
Bibliographie	67

1. Introduction

Afin d'expliquer les résultats des expériences de diffusion (de collision atomique par exemple), les physiciens utilisent fréquemment des modèles faisant intervenir les valeurs de la matrice de diffusion $S(\lambda)$ à des énergies complexes. Tel est le cas en particulier pour l'interprétation des pics qu'ils observent sur les spectres d'absorptions, encore appelés résonances, qui peuvent s'associer assez naturellement aux pôles complexes de $S(\lambda)$

D'un point de vue mathématique cela ne va pas sans poser quelques interrogations, étant donné qu'il est loin d'être évident a priori que l'on puisse définir correctement $S(\lambda)$ pour des énergies λ complexes. Plusieurs travaux ont tenté de répondre à cette question en montrant pour certains problèmes que $S(\lambda)$ peut se prolonger méromorphiquement à des énergies complexes, et que de plus ses pôles s'identifient alors à ceux de la résolvante. (Faisant ainsi le lien avec la définition des résonances plus généralement utilisée en Mathématiques.) Le cas du problème à deux corps avec des potentiels à courte portée était en particulier traité assez complètement au cours des années 1970. (Voir par exemple [Sh-Th], [Ba1] et [Ba2])

Pour ce qui est des problèmes à longue portée, la question n'a été résolue que plus tardivement, en 1985, par Gérard et Martinez [G-M] qui montraient l'existence d'un prolongement méromorphe et l'identification des pôles de ce prolongement à ceux de la résolvante, complétant ainsi l'étude du problème à deux corps.

En revanche en ce qui concerne le problème à N corps les résultats à ce sujet se limitaient aux potentiels à courte portée et restaient qui plus est

très partiels. Parmi les plus significatifs on trouve principalement ceux de Balslev (1980) [Ba3], qui ne traitaient que de la diffusion élastique 2 amas - 2 amas, sous le seuil d'énergie des décompositions à trois amas, prouvant dans ce cas l'existence d'un prolongement méromorphe de la matrice de diffusion, prolongement dont les pôles sont des pôles de la résolvante.

Dans cet article nous traiterons des problèmes à N corps, avec des potentiels à longue portée. Nous montrerons que les matrices de diffusion 2 amas - k amas, (pour $2 \leq k \leq N$), se prolongent méromorphiquement et que leurs pôles sont aussi des pôles de la résolvante. Nous prouverons en sus que leurs noyaux sont analytiques par rapport aux variables angulaires en dehors des plans de collision, et en dehors de la diagonale dans le cas d'une collision élastique.

Les méthodes que nous utiliserons sont radicalement différentes de celles de [Ba3], et s'approchent beaucoup plus de celles utilisées pour l'étude du problème à deux corps dans [G-M]. En particulier nous utiliserons une définition stationnaire des opérateurs d'onde introduite par Isozaki et Kitada dans [I-K].

Dans la suite de l'introduction nous précisons tout d'abord les hypothèses, nos notations, et la définition des opérateurs d'onde utilisée. On rappellera brièvement en particulier la construction originale d'Isozaki-Kitada. Nous y donnerons enfin l'énoncé de nos résultats (Théorèmes 1.9 et 1.10).

La démonstration nécessitera dans un premier temps la formulation d'une nouvelle construction des opérateurs d'onde, qui tout en redonnant la définition proposée en introduction, aura de "bonnes" propriétés, indispensables à la suite du raisonnement.

Utilisant cette construction nous effectuerons alors les démonstrations de nos résultats.

L'appendice est un bref développement de la théorie des "boost-distorsions" pour le problème à N corps, qui est un élément important de la démonstration. Nous l'avons mis à part car ne traitant pas spécifiquement de la diffusion il peut être utilisé dans un cadre différent.

1.1 Notations

1.1.1 Notations générales.

Commençons par préciser quelques notations relatives aux opérateurs linéaires. Pour tout espace de Hilbert $\mathcal{H}$ nous noterons $B(\mathcal{H})$ l'ensemble des opérateurs linéaires bornés de $\mathcal{H}$ dans lui même. Pour tout opérateur T linéaire fermé sur $\mathcal{H}$, borné ou non, nous définirons $\sigma(T)$ le spectre de T , $\rho(T)$ l'ensemble résolvant de T , $\sigma_e(T)$ le spectre essentiel de T et $\sigma_d(T)$ le spectre discret de T .

Pour deux opérateurs linéaires A et B nous utiliserons la notation $ad_A(B)$ pour le commutateur $[A, B] = AB - BA$. Si A est auto-adjoint nous noterons $\langle A \rangle = (1 + A^2)^{\frac{1}{2}}$.

La théorie des dilatations analytiques nous sera fort utile dans cet article. Pour $\theta \in \mathbb{R}$ assez petit on définit l'opérateur unitaire U_θ par :

$$U_\theta : \begin{cases} L^2(\mathbb{R}^n) & \rightarrow L^2(\mathbb{R}^n) \\ f(x) & \rightarrow (1 + \theta)^{n/2} f(x(1 + \theta)) \end{cases}$$

Pour $\mu > 0$ on définit l'ensemble des vecteurs de $L^2(\mathbb{R}^n)$, μ -analytiquement dilatables, que l'on notera $L^2(\mathbb{R}^n)_\mu$, comme étant l'ensemble des vecteurs $\psi \in L^2(\mathbb{R}^n)$ tels que $U_\theta \psi$ se prolonge holomorphiquement dans une région $|Im(\theta)| < \mu$ et tels que :

$$\exists C \in \mathbb{R} \quad | | Im(\theta) | < \mu \Rightarrow \|U_\theta \psi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C \quad (1.1)$$

On définit alors la norme $\|\psi\|_{L^2(\mathbb{R}^n)_\mu}$ par la meilleure constante C que l'on peut prendre dans l'inégalité ci-dessus.

De même on définit l'ensemble des opérateurs bornés μ -analytiquement dilatables, que l'on notera $B_\mu(L^2(\mathbb{R}^n))$, comme étant l'ensemble des opérateurs $M \in B(L^2(\mathbb{R}^n))$ tels que $U_\theta M U_\theta^{-1}$ se prolonge holomorphiquement dans une région $|Im(\theta)| < \mu$ et tels que :

$$\exists C \in \mathbb{R} \quad | | Im(\theta) | < \mu \Rightarrow \|U_\theta M U_\theta^{-1}\| \leq C \quad (1.2)$$

On définit là aussi la norme $\|M\|_{B_\mu(L^2(\mathbb{R}^n))}$ par la meilleure constante C que l'on peut prendre dans cette inégalité. Il est clair que $B_\mu(L^2(\mathbb{R}^n))$ a une structure d'algèbre.

Nous rappelons la définition des classes de fonctions Gevrey sur la sphère

unité S : nous dirons qu'une fonction f est Gevrey s sur S si il existe une constante C telle que pour tout entier k on ait :

$$\|D^k f\| \leq C^k (k!)^s$$

$D^k f$ étant la différentielle k^{ieme} de f . Nous écrirons $f \in G^s(S)$

Pour $x, y \in \mathbb{C}^n$ nous utiliserons la notation régularisante $\langle x \rangle = (1 + |x|^2)^{\frac{1}{2}}$ et nous définirons la fonction cosinus par $\cos(x, y) = \cos(\operatorname{Re}(x), \operatorname{Re}(y))$.

L'écriture $f(x) = O(\langle x \rangle^{-\infty})$ signifiera que $\langle x \rangle^p \|f(x)\|$ est borné pour tout $p \in \mathbb{N}$.

Enfin pour une fonction réelle $g(t)$ donnée, nous utiliserons pour simplifier, quand cela ne porte pas à confusion, la notation générique $\chi(g(t) \geq C)$ qui se définit rigoureusement par :

$$\chi(g(t) \geq C) = \chi_0(g(t) - C)$$

où χ_0 est une fonction de troncature de classe C^∞ telle que :

$$\begin{cases} \chi_0(x) = 1 & \text{pour } x \geq 0 \\ \chi_0(x) = 0 & \text{pour } x \leq -\epsilon \end{cases}$$

avec $0 < \epsilon < 1$.

La notation $\chi(g(t) \leq C)$ se définit de façon tout à fait similaire.

1.1.2 Notations liées au problème à N corps.

Dans l'étude du Hamiltonien à N corps (1.5) nous séparons dans un premier temps, de façon tout à fait classique, le mouvement du centre de masse, ce qui nous ramène à l'étude du Hamiltonien $H = -\Delta_{|x} + V(x)$ opérant sur $L^2(X)$ où X est l'espace :

$$X = \{x \in \mathbb{R}^{nN} \mid \sum m_i x_i = 0\}$$

et $\Delta_{|x}$ l'opérateur de Laplace-Beltrami associé à la métrique :

$$q(x, y) = \sum 2m_i (x_i, y_i) \quad .$$

Nous appellerons décomposition en k amas, toute partition $(A_1, \dots, A_k)$, de $\{1, \dots, N\}$. L'ensemble des décompositions est muni d'une relation d'ordre définie par : $a \subset b$ si a est une partition plus fine que b .

Nous noterons conventionnellement (i, j) la partition à $N - 1$ amas dont un est formé par la paire (i, j) . Ainsi la relation $(i, j) \subset a$ sera vérifiée si et seulement si les particules i et j appartiennent à un même amas A_k de la décomposition a .

A chaque décomposition a nous faisons correspondre deux sous espaces X_a et X^a définis par :

$$X_a = \{x \in X \mid x_i = x_j \text{ si } (i, j) \subset a\}$$

$$X^a = \{x \in X \mid \sum_{i \in A_j} m_i x_i = 0\}$$

X^a représente l'espace des variables internes aux amas, alors que X_a représente l'espace des variables externes, variables décrivant la position relative des centres de masse de chacun des amas.

Ces deux sous espaces sont orthogonaux pour la métrique $q(x, y)$, et l'on a

$$X = X_a \oplus X^a$$

Nous noterons S_a la sphère unité de X_a .

On pose pour toute décomposition a :

$$I_a(x) = \sum_{(i,j) \not\subset a} V_{ij}(x), \quad V^a(x^a) = \sum_{(i,j) \subset a} V_{ij}(x) \text{ et } H_a = H - I_a.$$

On a :

$$H_a = I_{|X^a} \otimes (-\Delta_{|X_a}) + (-\Delta_{|X^a} + V^a(x^a)) \otimes I_{|X_a}$$

ce que l'on notera plus couramment $H_a = -\Delta_{|X_a} + H^a$, H^a étant le Hamiltonien interne $-\Delta_{|X^a} + V^a(x^a)$ opérant sur $L^2(X^a)$.

Nous noterons $\sigma^a = \sigma_d(H^a)$ et $\tau_a = \bigcup_{b \subset a, b \neq a} \sigma^b \cup \{0\}$ le spectre purement ponctuel et l'ensemble des seuils du Hamiltonien interne H^a .

Les notations $\sigma(H)$ et $\tau(H)$, qui sont les valeurs propres et les seuils du Hamiltonien H , correspondent à celles définies ci-dessus dans le cas trivial où a est la décomposition en un amas.

On appelle canal de réaction $\alpha = (a, \psi_\alpha, \epsilon_\alpha)$ la donnée d'une décomposition a , et d'un vecteur propre, ψ_α , de H^a , de valeur propre ϵ_α .

Pour un intervalle d'énergie Δ et un canal de réaction donnés nous noterons π_α la projection orthogonale sur le vecteur ψ_α , et p_α l'application définie par :

$$p_\alpha : \begin{cases} L^2(X_a) & \rightarrow L^2(X) \\ \phi & \rightarrow E_\Delta(H_a)\phi \otimes \psi_\alpha \end{cases}$$