

MÉMOIRES DE LA S. M. F.

GILLES LEBEAU

Propagation des ondes dans les dièdres

Mémoires de la S. M. F. 2^e série, tome 60 (1995)

<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1995_2_60__1_0>

© Mémoires de la S. M. F., 1995, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mémoires de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Memoires/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

PROPAGATION DES ONDES DANS LES DIÈDRES

Gilles LEBEAU

Abstract. — We study the propagation of analytic singularities for a solution of the wave equation of finite energy in a domain Ω of $\mathbb{R}^n$, with Dirichlet boundary conditions, near a (codimension 2) corner of the boundary.

Résumé. — On étudie la propagation des singularités analytiques pour les solutions d'énergie finie de l'équation des ondes dans un domaine Ω de $\mathbb{R}^n$, avec conditions de Dirichlet, près des points de type dièdre du bord.

AMS Subject Classification Index : 35 L 05, 35 S 15.

Texte reçu le 4 Février 1994
Université de Paris-Sud, Département de Mathématiques, Bât. 425, 91405 Orsay Cedex.
URA 760 du CNRS

TABLE DES MATIÈRES

0. INTRODUCTION	5
I. GEOMETRIE	13
I.1. Fibres cotangents	
I.2. Variété caractéristique	
I.3. Rayons	
II. FRONT D'ONDE	27
II.1. Estimations a priori	
II.2. Front d'onde	
II.3. Continuité des opérateurs de Poisson	
III. MICROLOCALISATION	39
III.1. Transformation F.B.I.	
III.2. Polynômes elliptiques	
III.3. Espaces de Sjöstrand et calcul pseudo-différentiel	
III.4. Le projecteur de Hilbert	
III.5. Réduction microlocale et système de Calderón	
IV. ESTIMATIONS ELLIPTIQUES	59
IV.1. Calcul dans les chaînes d'espaces de Banach	
IV.2. Problèmes elliptiques dans le plan	
IV.3. Preuve du théorème 2	
IV.4. Preuve du théorème 1	
V. REFLECTION HYPERBOLIQUE	89
V.1. Estimation 2-microlocale des traces	
V.2. Déformation du système de Calderón	
VI. MICROHYPERBOLICITE	103
VI.1. Théorème microhyperbolique	
VI.2. Estimation près de S_g^2	
VII. PROPAGATION DES SINGULARITES	115
APPENDICE. Rappels de deuxième microlocalisation tempérée	119
BIBLIOGRAPHIE	123

0. INTRODUCTION

Soient $h_1(x), h_2(x)$ deux fonctions analytiques réelles définies près de $x_0 \in \mathbb{R}^d$ vérifiant $h_1(x_0) = h_2(x_0) = 0$, $dh_1(x_0)$ et $dh_2(x_0)$ linéairement indépendants. Soient Δ_1, Δ_2 les demi-hypersurfaces ouvertes

$$(1) \quad \begin{cases} \Delta_1 = \{x, h_2(x) = 0, \quad h_1(x) > 0\} \\ \Delta_2 = \{x, h_1(x) = 0, \quad h_2(x) > 0\} \end{cases}$$

et L l'arête

$$(2) \quad L = \{x; h_1(x) = h_2(x) = 0\}.$$

Soit Ω^i (resp. Ω^e) l'ouvert intérieur (resp. extérieur)

$$(3) \quad \begin{cases} \Omega^i = \{x; h_1(x) > 0 \quad \text{et} \quad h_2(x) > 0\} \\ \Omega^e = \{x; h_1(x) < 0 \quad \text{ou} \quad h_2(x) < 0\}. \end{cases}$$

On a $\partial\Omega^i = \partial\Omega^e = \Delta$, où Δ est le dièdre

$$(4) \quad \Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2 \cup L.$$

On s'intéresse à décrire les singularités analytiques et leur propagation, pour les solutions de l'équation des ondes dans $M = \mathbb{R}_t \times \Omega$, $\Omega = \Omega^i$ ou Ω^e , d'énergie finie, et vérifiant la condition de Dirichlet

$$(5) \quad \begin{cases} \partial_t^2 u - \Sigma_j \partial_{x_j}^2 u = 0 & \text{dans } M \\ u|_{\partial M} = 0 & \text{et } u \in H_{\text{loc}}^1(\overline{M}). \end{cases}$$

Lorsque les équations h_i des faces du dièdre sont linéaires, le calcul de la fonction de Green du problème (5) a été effectué par GARNIR [G]. Le cas plus général d'ouverts Ω à singularités coniques a été traité dans la catégorie C^∞ par CHEEGER-TAYLOR [C-T], et dans la catégorie analytique par ROULEUX [R]. Dans le cas des dièdres à faces linéaires, le problème (5) avec des conditions aux limites plus générales a été étudié par ESKIN [E]. Dans le cas des dièdres à faces "courbes", et pour le problème extérieur $\Omega = \Omega^e$, UCHIDA [U] a obtenu des estimations a priori sur les singularités analytiques et GÉRARD-LEBEAU [G-L], dans le cas $d = 2$, ont traité le problème de l'asymptotique sur le cône diffracté de la solution de (5) associée à une onde conormale entrante. Les résultats obtenus ici généralisent ceux de [G-L] : nous définissons un front d'onde analytique jusqu'au bord pour les solutions de (5); nous travaillons en dimension d'espace d quelconque, ce qui force à considérer la propagation le long de rayons tangents à l'arête L (absents en dimension $d = 2$), enfin nous traitons conjointement

les cas intérieurs et extérieurs, et l'étude n'est pas restreinte au cas de singularités conormales entrantes.

Décrivons plus précisément les résultats obtenus. On choisit d'abord un système de coordonnées $x = (x', x'')$, $x' = (x_1, x_2)$, $x'' = (x_3, \dots, x_n)$ ($n = d + 1$, de sorte que x'' contient la variable temporelle) qui redresse le dièdre, de sorte que $h_1 = x_1$, $h_2 = x_2$. On appelle x' les variables normales et x'' les variables tangentielles. On travaille avec un opérateur P différentiel d'ordre 2 à coefficients analytiques de la forme

$$(6) \quad P(x, D) = P_1(x, D') + L(x, D', D'') + Q(x, D'')$$

de symbole principal $p = p_1 + \ell + q$ à coefficients analytiques, et vérifiant

$$(7) \quad \begin{cases} p \text{ réel; } p(x, \xi) = 0 \text{ et } \xi \neq 0 \implies \partial_\xi p \neq 0 \\ p_1(x, \xi') \geq c_0 |\xi'|^2 \quad c_0 > 0 \end{cases}$$

et on a donc $\text{Car } p \cap T_\Delta^* \subset \{\xi = 0\}$, avec $T_\Delta^* = T_{\Delta_1}^* \cup T_{\Delta_2}^* \cup T_L^*$. On note $M^i = \{x_1 > 0 \text{ et } x_2 > 0\}$ l'ouvert intérieur, $M^e = \{x_1 < 0 \text{ ou } x_2 < 0\}$ l'ouvert extérieur.

On note π la projection canonique de $\dot{T}^* \overline{M} \setminus \dot{T}_\Delta^*$ sur $\dot{T}_b^* M = \dot{T}^* M \cup \dot{T}^* \Delta_1 \cup \dot{T}^* \Delta_2 \cup \dot{T}^* L$, qu'on munit de la topologie quotient, ${}^b \dot{T}^* \mathbb{R}^n$ le fibré cotangent de Melrose (dual du fibré des champs de vecteurs tangents à $x_1 x_2 = 0$) et $\tilde{\pi}$ l'application canonique de $\dot{T}^* \overline{M} \setminus \dot{T}_\Delta^*$ dans ${}^b \dot{T}^* \overline{M}$ définie en coordonnées par

$$(8) \quad (x', x'', \xi', \xi'') \mapsto (x', x'', \xi''; v_1 = x_1 \xi_1, v_2 = x_2 \xi_2).$$

On a donc le diagramme

$$(9) \quad \begin{array}{ccc} \dot{T}^* \overline{M} \setminus \dot{T}_\Delta^* & \xrightarrow{\tilde{\pi}} & \text{Im}(\tilde{\pi}) \subset {}^b \dot{T}^* \overline{M} \\ \pi \downarrow & \nearrow i & \\ \dot{T}_b^* M & & \end{array}$$

la flèche d'identification i étant bijective continue (ce n'est pas un homéomorphisme; π n'est ni ouverte, ni fermée et $\dot{T}_b^* M$ n'est pas métrisable, alors que ${}^b \dot{T}^* \mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^{2n}$ est une variété différentiable). On note aussi

$$(10) \quad \Sigma_b = \pi(\text{Car } p), \quad Z = \tilde{\pi}(\text{Car } p).$$

Alors $i : \Sigma_b \rightarrow Z$ est un homéomorphisme, ce qui nous permettra d'identifier Σ_b et Z ; Σ_b est la variété caractéristique du problème aux limites dans le dièdre.

Définition 1. La région elliptique $\mathcal{E}$ de $\dot{T}_b^*M$ est

$$(11) \quad \mathcal{E} = \dot{T}_b^*M \setminus \Sigma_b = \{\rho; \pi^{-1}(\rho) \cap \text{Car } p = \emptyset\}.$$

On notera Z_L (resp. Z_Δ) les points de Z au dessus de l'arête L (resp. au dessus du dièdre Δ), et on stratifie Z par

$$(12) \quad Z = S^0 \cup S^1 \cup S^2; \quad S^0 = Z \setminus Z_\Delta, \quad S^1 = Z_\Delta \setminus Z_L, \quad S^2 = Z_L.$$

Définition 2. On définit la région glissante $\mathcal{G}$ de Z par

$$(13) \quad \mathcal{G} = \{\rho; \#\{\pi^{-1}(\rho) \cap \text{Car}(p)\} = 1\}$$

et la région transverse $\mathcal{T}$ de Z par

$$(14) \quad \mathcal{T} = Z \setminus \mathcal{G}.$$

On notera que $\mathcal{G} \cap S^0 = S^0$, $\mathcal{G} \cap S^1$ est la région glancing usuelle sur les faces du dièdre, et $\mathcal{G} \cap S^2$ correspond aux bicaractéristiques de p tangentes à l'arête L ; $\mathcal{G}$ n'est pas fermé.

Dans le système de coordonnées choisi on a

$$(15) \quad p(x, \xi) = {}^t(\xi' - \nu) A_x(\xi' - \nu) - R(x, \xi'')$$

où A_x est une matrice 2×2 symétrique définie positive, $\nu = \nu(x, \xi'')$ est linéaire en ξ'' . Avec $R_0 = R|_{x'=0}$ on a

$$(16) \quad S^2 = \{R_0 \geq 0\}, \quad S^2 \cap \mathcal{G} = \{R_0 = 0\}, \quad S^2 \cap \mathcal{T} = \{R_0 > 0\}.$$

On posera $S_g^i = S^i \cap \mathcal{G}$, $S_t^i = S^i \cap \mathcal{T}$. Soit $T_\rho Z$ le cône tangent en ρ à Z .

Définition 3. Soit $\rho \in \Sigma_b$; on définit les vecteurs entrants (resp. sortants) $\mathcal{V}_\rho^-$ (resp. $\mathcal{V}_\rho^+$), comme le sous-ensemble de $\mp T_\rho Z$

$$(17) \quad \mathcal{V}_\rho^\mp = \left\{ d\tilde{\pi}(H_p(q)); \pi(q) = \rho, q \in \text{Car}(p), \text{pr}(\mp H_p(q)) \in T\overline{M} \right\}.$$

Pour $\rho \in \mathcal{G}$, on a $\mathcal{V}_\rho^- = \mathcal{V}_\rho^+ = \{d\tilde{\pi}(H_p(q))\}$ où $q = \pi^{-1}(\rho) \cap \text{Car}(p)$, et on notera $H_g(\rho) = d\tilde{\pi}(H_p(q))$. Pour $\rho \in S_g^i$, on a $H_g(\rho) \in T_\rho S_g^i$, et donc les strates S_g^i de $\mathcal{G}$ sont feuilletées par les courbes intégrales du champ (hamiltonien) H_g .

Pour $\rho \in S_t^i$, on a $\mathcal{V}_\rho^\mp \cap T_\rho S_t^i = \emptyset$.

Définition 4. Un rayon est une application continue γ de I (intervalle de $\mathbb{R}$) dans $\Sigma_b \simeq Z \subset \mathbb{R}^{2n}$ vérifiant

- (18) si $\gamma(t_0) \in \mathcal{G}$, γ est dérivable en t_0 et $\dot{\gamma}(t_0) = H_g(\gamma(t_0))$
 (19) si $\gamma(t_0) \in S_t^i$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\gamma(t) \notin S^i$ pour $0 < |t - t_0| < \varepsilon$.

Les rayons sont (localement uniformément sur $\overline{M}$) Lipschitz, dérivables à gauche et à droite en tout point et $\dot{\gamma}_{g,d}(t) \in \mathcal{V}_{\gamma(t)}^\mp$. L'ensemble des rayons est fermé pour la topologie de la convergence uniforme, et par chaque point, il passe au moins un rayon maximal (voir le paragraphe I).

On va définir $SS_b(u)$ comme sous-ensemble de $\dot{T}_b^*M$. En coordonnées polaires $x_1 = r \cos \theta$, $x_2 = r \sin \theta$ soit $E = \{f(x_1, x_2); f, \partial_r f, \frac{1}{r} \partial_\theta f \in C^0(\overline{I}; L_r^2)\}$ où $I =]0, \frac{\pi}{2}[$ (cas intérieur) ou $I =]-\frac{3\pi}{2}, 0[$ (cas extérieur), et $E_0 = \{u \in E, u|_{\theta \in \partial I} = 0 \text{ et } u|_{r=0} = 0\}$. Soit aussi F le sous-espace de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ formé des $u(x', x'')$ qui vérifient

$$(20) \quad \begin{cases} \forall \theta_0 \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2), \quad \forall K \text{ compact de } \mathbb{R}^{n-2} \quad \exists C, m \\ \forall \theta_1 \in C_0^\infty(K) \left\| \theta_0(x') \int u(x', x'') \theta_1(x'') dx'' \right\|_{E_0} \leq C \sup_{|\alpha| \leq m} |\partial^\alpha \theta_1|_\infty \end{cases}$$

c'est-à-dire $F = \mathcal{D}'(\mathbb{R}_{x''}^n; E_{0,\text{loc}})$.

En suivant l'étude faite par KONDRAT'EV [K] sur les problèmes elliptiques dans les coins, on obtient (voir le paragraphe II, proposition 1)

$$(21) \quad Pu = 0, \quad u \in H_0^1 \implies u \in F.$$

On définit alors $SS_b(u)$ par régularité tangentielle comme suit : Soit T_0 la transformation de FBI tangentielle

$$(22) \quad T_0 u(w, x', \lambda) = \int e^{\lambda w x'' - \lambda \frac{x''^2}{2}} u(x', x'') dx''$$

et φ_0 la fonction poids $\varphi_0(w) = \frac{1}{2}(\text{Re } w)^2$. D'après (21), si $Pu = 0$, $u \in H_0^1$, $\theta_1(x'') \in C_0^\infty$ on a $T_0(\theta_1 u) \in \mathcal{H}_{\varphi_0}(E_{0,\text{loc}})$, espace de Sjöstrand à valeurs dans $E_{0,\text{loc}}$.

Définition 5. Soit $u \in H_0^1$, $Pu = 0$, $\rho \in \dot{T}_b^*M$. On définit $SS_b(u)$ en posant que ρ n'appartient pas à $SS_b(u)$ ssi

- 1) si $\rho \notin \dot{T}^*L$, définition usuelle
- 2) si $\rho = (x_0'', \xi_0'') \in \dot{T}^*L$, $w_0 = x_0'' - i\xi_0''$, il existe $\theta_1(x'') \in C_0^\infty$, $\theta_1 \equiv 1$ près de x_0'' , $\theta_0(x') \in C_0^\infty$, $\theta_0 \equiv 1$ près de 0, W voisinage de w_0 et $\varepsilon_0 > 0$ tels que pour $w \in W$, $\lambda \geq 1$

$$(23) \quad \|\theta_0 T_0 \theta_1 u\|_E \leq \frac{1}{\varepsilon_0} e^{\lambda(\varphi_0(w) - \varepsilon_0)}.$$

On a alors la proposition suivante (voir le paragraphe II, proposition 2).

Proposition. $SS_b(u)$ est fermé, localement compact dans $\dot{T}_b^*M$ (on prendra garde au fait que ce résultat est faux sans la condition aux limites $u|_{\partial} = 0$).

Il n'est pas évident que la définition précédente de $SS_b(u)$ soit indépendante du système de coordonnées choisi, ou de l'espace E_0 de régularité normale choisie; toutefois, cela est vrai, en effet on a (voir le paragraphe IV.4).

Théorème 1.

$$SS_b(u) = \pi(SS(\underline{u}) \setminus \dot{T}_{\Delta}^*)$$

où $\underline{u}$ est le prolongement canonique de u par zéro à $\mathbb{R}^n \setminus \overline{M}$.

Dans la suite u désigne toujours une solution du problème aux limites : $u \in H_0^1$, $Pu = 0$.

On prouve dans le paragraphe IV.3 le :

Théorème 2. (Régularité elliptique)

$$(24) \quad SS_b(u) \subset \Sigma_b.$$

Pour $\rho_0 \in S_t^2$ et $a > 0$ soit $\Gamma_{\rho_0, a}^-$ l'ensemble des rayons entrants en ρ_0

$$(25) \quad \Gamma_{\rho_0, a}^- = \left\{ \text{rayons : } [-a, 0[\xrightarrow{\gamma} (\dot{T}^* \dot{M} \cup \dot{T}^* \dot{\Delta}_1 \cup \dot{T}^* \dot{\Delta}_2) \cap \Sigma_b; \gamma(s) \rightarrow \rho_0(s \rightarrow 0^-) \right\}.$$

On prouve dans le paragraphe V le :

Théorème 3. (Réflexion hyperbolique sur l'arête)

Soit $\rho_0 \in S_t^2$. On suppose qu'il existe un voisinage W de ρ_0 dans Σ_b et $a_0 > 0$ tel que pour tout $\rho \in W$ tel qu'il existe $\gamma \in \Gamma_{\rho_0, a}^-$ avec $a \leq a_0$ et $\gamma(-a) = \rho$, on a $\rho \notin SS_b(u)$. Alors

$$(26) \quad \rho_0 \notin SS_b(u).$$

Les théorèmes 2 et 3 s'obtiennent en écrivant les projecteurs de Calderón déduits de l'équation $P\underline{u} = g_1 \delta_1 + g_2 \delta_2$ ($\delta_1 = \delta_{x_2=0}$, $\delta_2 = \delta_{x_1=0}$), qui fournissent un système 2×2 d'équations sur les traces g_i des dérivées normales (pour P) de u sur les faces du dièdre. le point clé est d'obtenir des estimations 2-microlocales a priori pour g_1 , g_2 , $\underline{u}$ sur les involutives $\{x_1 = 0\}$, $\{x_2 = 0\}$, $\{x_1 = x_2 = 0\}$, qui permettent d'écrire le