

MÉMOIRES DE LA S. M. F.

NICOLE BARDY

Systemes de racines infinis

Mémoires de la S. M. F. 2^e série, tome 65 (1996)

<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1996_2_65__R1_0>

© Mémoires de la S. M. F., 1996, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mémoires de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Memoires/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques

<http://www.numdam.org/>

Mémoire de la
Société Mathématique de France
Numéro 65, 1996

Systemes de racines infinis

Nicole BARDY

Abstract — The aim of this work is to create sets of axioms of root systems that are general enough to include Kac-Moody algebras and also the systems that appear in the generalization by Borchers of these algebras or in their almost- K -split forms, and compatible with Moody and Pianzola's axiomatization of 'real root systems'.

In this abstract theory, we prove the basic theorems (essential to make the theory useful) which deal with the problems of subroot systems, conjugacy of bases, fields' extensions and quotient root systems (which appear in the study of almost- K -split forms).

Résumé — L'objet de ce mémoire est de développer une théorie abstraite des systèmes de racines de façon suffisamment générale pour englober les systèmes des algèbres de Kac-Moody, ceux de leur généralisation par Borchers ainsi que ceux des formes presque-déployées des algèbres de Kac-Moody ; cette axiomatisation devant, de plus, être compatible à celle des « systèmes de racines réelles » proposée par Moody et Pianzola.

Une fois la structure définie, sont abordés les problèmes de functorialité et sont alors traités : le changement de corps de base, la notion de sous-système et une généralisation du théorème classique de conjugaison des bases (dans le cas indécomposable).

Enfin, le cadre abstrait choisi permet d'obtenir deux théorèmes de stabilité importants lors du quotient par un groupe d'automorphismes de diagramme et du quotient par une partie de type fini. (Ces quotients apparaissent dans l'étude des systèmes de racines des formes presque-déployées.)

AMS Subject Classification Index: 17B67, 17B65, 20F55.

Table des matières

Introduction	1
Quelques exemples de systèmes de racines	1
Vers une axiomatisation	5
Résumé des résultats du mémoire	7
Remerciements	12
1 Système de racines d'une algèbre de Kac-Moody-Borcherds	13
1.1 Matrice de Borcherds et groupe de Weyl associé	13
Matrices de Borcherds	13
Classification	15
Réalisation d'une matrice A de Borcherds sur une extension \mathbf{K} de \mathbb{K}	18
Le groupe de Weyl	20
Résultats de J.-Y. Hée pour l'action de \mathbb{W} sur $\tilde{Q}(I_{re})$	23
L'action de \mathbb{W} sur Q sous l'hypothèse (R1)	27
1.2 Étude du système de racines d'une algèbre de Kac-Moody-Borcherds	29
L'algèbre $\tilde{g}(A, R)$	29
L'algèbre de Kac-Moody-Borcherds	30
Étude de relations entre éléments de \mathfrak{g}	33
Propriétés du système de racines universel de l'algèbre de K.M.B. . .	36
Remarque	42
2 Systèmes de racines à base libre – axiomes et construction	43
2.1 Matrices de Borcherds relatives	43
Définitions	43
Matrices de Kac-Moody relatives et indécomposables (M. R. I).	
Classification	46
Coracines	50

2.2	Systèmes de racines à bases libres	52
	Généralités	52
	Résultat d'unicité	55
2.3	Construction d'un système de racines à base libre	57
	Premiers résultats d'inclusion ; le candidat Θ	57
	Premières propriétés du candidat Θ	57
	Les conditions de chaînes réelles	58
	Les conditions de chaînes imaginaires	61
2.4	Existence des systèmes de racines	62
3	Coracines des racines imaginaires dans le cas libre	67
3.1	Notion de cônes radiciels duaux	67
	Définitions et résultats utiles	67
	Propriétés des éléments de K_c	68
	Le cône radiciel dual associé : cas « standard »	69
	Définition des cônes duaux : cas général	72
3.2	Coracines	73
	Propriétés des cônes duaux	73
	Choix d'une coracine	74
	Application à l'étude du système de racines	76
4	Systèmes générateurs de racines et systèmes de racines engendrés	79
4.1	Systèmes générateurs de racines, définitions	79
	Définitions	79
	Morphismes de S.G.R. et extension des scalaires	83
	Changement de corps (de base)	84
	Le groupe de Weyl et les racines réelles	85
	Chaînes et système de racines engendré	85
4.2	Revêtement	86
	Définition	86
	Groupe de Weyl et racines réelles, lien avec le revêtement	89
	Systèmes de racines	92
4.3	Structure du système de racines $\Delta(S)$	98
	Les sous-systèmes $\Delta(J)$ avec $J \subset I$ (cas « standard »)	98
	Les coracines	99
	Système générateur de racines normalisé	102
4.4	Géométrie d'un S.G.R.	109