FRANÇOIS COURTÈS

Sur le transfert des intégrales orbitales pour les groupes linéaires (cas p-adique)

Mémoires de la S. M. F. 2e série, tome 69 (1997)

<http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1997_2_69__1_0>

SUR LE TRANSFERT DES INTÉGRALES ORBITALES POUR LES GROUPES LINÉAIRES (CAS p-ADIQUE)

François Courtès

Résumé. — Le but de cet article est de résoudre le problème du transfert des intégrales orbitales de $SL_n(F)$, où F est un corps local non archimédien de caractéristique 0, à ses groupes endoscopiques, dans le cas où la caractéristique résiduelle p de F est strictement supérieure à n. On démontre en fait le résultat suivant (qui l'implique) : si $G = GL_n(F)$ et $H = GL_m(E)$, où E est une extension de F modérément ramifiée de degré n/m, et si p est quelconque, le transfert de G à H marche pour les éléments semi-simples réguliers engendrant dans $M_n(F)$ une algèbre qui est produit d'extensions modérément ramifiées de F.

Au voisinage de l'unité, on peut développer les intégrales orbitales sur G et H en germes de Shalika ; il suffit donc de les comparer pour des fonctions appartenant à un certain espace bien choisi. Pour ces fonctions, on a un autre développement en germes, liés aux traces tordues d'induites de représentations de Steinberg. On calcule donc de telles traces, puis on établit des relations de récurrence (sur n) sur la valeur des intégrales orbitales, d'où l'on déduit des relations de récurrence sur la valeur de ces germes. On obtient également des relations de récurrence sur la valeur des facteurs de transfert ; toutes ces relations permettent de comparer la valeur des germes sur G et sur H ; le résultat cherché s'en déduit.

Abstract. — The purpose of this article is to solve the problem of the transfer of integral orbitals from $SL_n(F)$, where F is a local nonarchimedean field, to its endoscopic groups, when the residue characteristic p of F is strictly greater than n. In fact, one shows the following result (which implies the transfer) : with $G = GL_n(F)$ and $H = GL_m(E)$, E being a tamely ramified extension of F of degree n/m, and for any p, the transfer from G to H holds on the set of semisimple regular elements which generate in $M_n(F)$ an algebra which is the product of tamely ramified extensions of F.

In a neighborhood of unity, orbital integrals on G and H can be developed in Shalika germs; it is enough then to compare them for functions belonging to some well-chosen space. For these fonctions, one gets another development in germs, related to twisted traces of induced Steinberg representations. The computation of such traces, combined to recurrence relations (on n) on the value of orbital integrals, gives recurrence relations on the values of these germs. One gets recurrence relations on the value of transfer factors too; all these relations allow us to compare the value of germs on G and H, and the result follows.

Table des matières

INTRODUCTION

L'un des principaux problèmes de la théorie des formes automorphes est la comparaison de la formule des traces pour deux groupes réductifs différents, en particulier pour un groupe quasi-déployé et une de ses formes intérieures. Or on se rend rapidement compte que dans ce cas, il faut trouver une formule des traces stable, c'est-à-dire exprimée comme une somme sur les classes de conjugaison stable et non sur les classes de conjugaison sur F. Cela nécessite en particulier de vérifier le problème du transfert d'un groupe à ses groupes endoscopiques, ainsi que, dans le cas p-adique et non ramifié, le lemme fondamental. Or dans le cas p-adique, on n'a que des résultats partiels.

Le transfert pour SL_n a été vérifié pour la première fois par Labesse et Langlands, dans le cas $n = 2$ (cf. [**8**]). Il a ensuite été traité pour ε d'ordre n par Kazhdan (cf. [**7**]), puis dans le cas non ramifié par Waldspurger (cf. [**17**]).

Signalons que le problème traité ici a été également résolu par Waldspurger d'une manière entièrement différente. Ici, la méthode utilisée est purement locale; de plus, le fait que le corps est de caractéristique 0 n'intervient que dans le lemme 4.1.2, qui utilise le théorème 0 de [**6**] (cf. [**17**, III.1]). Il devrait donc être possible d'adapter la démonstration à des corps de caractéristique non nulle.

Soit F un corps local non archimédien de caractéristique 0, de caractéristique résiduelle p; soit ϖ une uniformisante de F, $\mathcal{O}$ l'anneau des entiers de F, $\mathfrak{p} = \varpi\mathcal{O}$ son idéal maximal.

Soit $G = GL_n(F)$, $G_1 = SL_n(F)$. D'après [**9**, III], les groupes endoscopiques de G_1 sont de la forme suivante : soit E une extension cyclique de F d'indice de ramification e et de degré résiduel f, telle que ef divise n; soit $m = n/ef$, et soit des entiers strictement positifs $m_1, \ldots, m_t$ dont la somme est m. Posons :

$$H = GL_{m_1}(E) \otimes \cdots \otimes GL_{m_t}(E)\,;$$

soit H_1 le sous groupe des éléments h de H tels que $N_{E/F} \circ \text{dét}\,(h) = 1$. Alors H_1 est un groupe endoscopique de G_1, et on obtient tous les groupes endoscopiques de G_1 de cette façon. Dans ce qui suit, on s'intéressera uniquement aux groupes endoscopiques elliptiques (ie tels que $H = GL_m\,(E)$), le cas des autres groupes endoscopiques s'en déduisant facilement.

Soit ε un caractère de F^* de noyau $N_{E/F}\,(E^*)$. Comme l'extension E/F est cyclique de degré ef, ε est d'ordre ef ; de plus, sa restriction à $\mathcal{O}^*$ est d'ordre e.

Soit G^H l'ensemble des éléments g de G semi-simples réguliers tels qu'il existe $h \in H$ et un isomorphisme de F-algèbres entre $F\,[g]$ et $E\,[h]$ qui envoie g sur h ; on dit alors que h est une image de g dans H.

Soit $\gamma \in G^H$. Alors le centralisateur T_γ de γ dans G est un tore maximal de G, et pour tout $g \in T_\gamma$, on a $\varepsilon \circ \text{dét}\,(g) = 1$. On peut donc définir, pour tout f dans l'espace $C_c^\infty\,(G)$ des fonctions sur G localement constantes à support compact, l'intégrale orbitale (tordue par ε) de f en γ de la façon suivante :

$$I_G^\varepsilon\,(f, \gamma) = \int_{T_\gamma \backslash G} \varepsilon \circ \text{dét}\,(g)\, f\left(g^{-1}\gamma g\right) dg,$$

la mesure sur $T_\gamma \backslash G$ étant déduite des mesures de Haar sur T_γ et G.

On définit de la même façon pour $\gamma_H \in H$, $f' \in C_c^\infty\,(H)$, l'intégrale orbitale de f' en γ_H :

$$I_H\left(f', \gamma_H\right) = \int_{T_{\gamma_H} \backslash H} f'\left(g^{-1}\gamma_H g\right) dg.$$

Soit $\gamma \in G^H$, et soit γ_H une image de γ dans H. On définit le facteur de transfert $\Delta_\varepsilon\,(\gamma, \gamma_H)$ de G sur H de la façon suivante : soient $h, h' \in H$, et soient $h_1, \ldots, h_m$ (resp. $h'_1, \ldots, h'_m$) les valeurs propres de h (resp. h') dans une extension de E les contenant toutes. Posons :

$$r\left(h, h'\right) = \prod_{i,j=1}^{m} \left(h_i - h'_j\right).$$

Alors on pose :

$$\Delta_{\varepsilon,1}\,(\gamma, \gamma_H) = \left| \prod_{\sigma, \tau \in \mathrm{Gal}(E/F), \sigma \neq \tau} r\left(\sigma\left(\gamma_H\right), \tau\left(\gamma_H\right)\right) \right|_F^{1/2} \left|\text{dét}_G\,(\gamma)\right|_F^{(m-n)/2};$$

cette expression ne dépend en fait pas du choix de γ_H lorsque γ est elliptique. D'autre part, soit v un élément de F^n tel que les $\gamma^k\,(v)$, $0 \leq k \leq n-1$, engendrent F^n ; puisque γ est régulier, il en existe. Posons :

$$\Delta_{\varepsilon,2}\,(\gamma) = \varepsilon^{-1}\left(\text{dét}\left(v, \gamma\,(v), \ldots, \gamma^{n-1}\,(v)\right)\right),$$

le déterminant étant pris par rapport à la base canonique de F^n ; cette expression ne dépend pas du choix de v. On pose alors :

$$\Delta_\varepsilon(\gamma, \gamma_H) = \Delta_{\varepsilon,1}(\gamma, \gamma_H)\,\Delta_{\varepsilon,2}(\gamma)\,.$$

On vérifie aisément l'assertion suivante : si $g \in G$ et $h \in H$,

$$\Delta_\varepsilon\left(g^{-1}\gamma g, h^{-1}\gamma_H h\right) = \varepsilon \circ \text{dét}(g)\,\Delta_\varepsilon(\gamma, \gamma_H)\,.$$

Le problème du transfert consiste à montrer la proposition suivante :

THÉORÈME. — *Pour tout $f \in C_c^\infty(G)$, il existe $f_H \in C_c^\infty(H)$ telle que pour tout $\gamma \in G^H$ et pour toute image γ_H de γ dans H, on ait :*

$$I_H(f_H, \gamma_H) = \Delta_\varepsilon(\gamma, \gamma_H)\, I_G^\varepsilon(f, \gamma)\,.$$

Par restriction à G_1 et H_1, on obtient le transfert pour SL_n.

L'objet de cet article est de le démontrer dans le cas où p est strictement supérieur à n. Pour cela, on montre (théorème 5.2.1) l'égalité ci-dessus avec les deux restrictions suivantes :

- on suppose E/F modérément ramifiée (c'est-à-dire telle que e n'est pas multiple de p) ;
- on considère uniquement les γ tels que $F[\gamma]$ est un produit d'extensions modérément ramifiées de F.

Il est clair que ces deux conditions sont vraies quels que soient E et γ si $p > n$. La seconde est également vraie pour tout γ si $p > m$.

Soit $\mathfrak{f} \in C_c^\infty(G)$. On définit $\phi_\mathfrak{f}$ sur l'ensemble des éléments de H semi-simples G-réguliers par :

$$\phi_\mathfrak{f}(\gamma_H) = \Delta_{\varepsilon,G}(\gamma, \gamma_H)\, I_G^\varepsilon(\mathfrak{f}, \gamma)\,,$$

où γ est un élément de G^H tel que γ_H est une image de γ. L'égalité cherchée est équivalente à l'assertion suivante : il existe $\mathfrak{f}_H \in C_c^\infty(H)$ telle que $I_H(\mathfrak{f}_H, \gamma_H) = \phi_\mathfrak{f}(\gamma_H)$ pour tout $\gamma_H \in H$ semi-simple G-régulier. Voici une esquisse de la preuve, développée plus en détail dans la section 5.2.

En utilisant [**11**, lemme 2.2 A], on montre qu'il suffit de poser une condition locale au voisinage d'un point semi-simple quelconque $\gamma_{0,H}$ de H. On peut se ramener facilement au cas $\gamma_{0,H}$ elliptique, puis au cas $\gamma_{0,H} = 1$. Le problème se ramène alors à comparer les germes de Shalika sur H et les germes de Shalika tordus par ε sur G.

Pour cela, on va en fait comparer des germes d'un autre type. Avant de définir ceux-ci, nous aurons besoin de quelques préliminaires.

Soit $K = GL_n(\mathcal{O})$ le sous-groupe compact maximal standard de G, et soit I le sous-groupe d'Iwahori standard de G : c'est le sous-groupe des éléments de K triangulaires supérieurs modulo $\mathfrak{p}$. Soit η un caractère de I de la forme suivante : si $h \in I$ et si $h_1, \ldots, h_n$ sont les termes diagonaux de h, on pose :

$$\eta(h) = \prod_{i=1}^{n} \varepsilon^{\epsilon(i)}(h_i),$$

où ϵ est une application de $\{1, \ldots, n\}$ dans $\mathbb{Z}/e\mathbb{Z}$ dont toutes les fibres ont n/e éléments ; soit l'espace de fonctions :

$$\mathcal{F}^{\eta} = \left\{ \mathfrak{f} \in C_c^{\infty}(G) \mid \forall g \in G, \forall h, h' \in I, \mathfrak{f}\left(h'gh\right) = \varepsilon \circ \text{dét}\left(h'\right) \eta\left(h'h\right) \mathfrak{f}(g) \right\}.$$

Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des caractères η de la forme ci-dessus ; on note $\mathcal{F}^{\mathcal{E}}$ la somme directe des $\mathcal{F}^{\eta}$.

Pour tout entier $k > 0$, soit $\mathcal{P}(k)$ (resp. $\mathcal{P}^0(k)$) l'ensemble des partitions non ordonnées (resp. ordonnées) de k. Pour toute partition $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_t)$ de k et tout entier l, on note :

$$l\lambda = (l\lambda_1, \ldots, l\lambda_t);$$

$$\lambda^l = (\lambda_1, \ldots, \lambda_t, \ldots, \lambda_1, \ldots, \lambda_t),$$

la séquence étant répétée l fois, et :

$$\lambda * l = (\lambda_1, \ldots, \lambda_1, \ldots, \lambda_t, \ldots, \lambda_t),$$

chaque terme étant répété l fois ; ce sont des éléments de $\mathcal{P}(lk)$. On vérifie aisément que les trois opérations ci-dessus commutent entre elles.

Pour tout entier $k > 0$, soit St_k la représentation de Steinberg de $GL_k(F)$. Soit $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_t) \in \mathcal{P}(k)$; on pose :

$$\mathrm{St}_{\lambda} = \mathrm{Ind}_{P(\lambda)}^{GL_k(F)} \left(\mathrm{St}_{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes \mathrm{St}_{\lambda_t}\right),$$

où $P(\lambda)$ est le sous-groupe parabolique triangulaire supérieur de Levi :

$$M(\lambda) = GL_{\lambda_1}(F) \times \cdots \times GL_{\lambda_t}(F).$$

Pour $\lambda \in \mathcal{P}(m)$, posons :

$$\mathrm{St}_{\lambda}^{\varepsilon} = \mathrm{Ind}_{P\left((m)^{ef}\right)}^{G} \left(\mathrm{St}_{\lambda} \otimes (\varepsilon \circ \text{dét}) \mathrm{St}_{\lambda} \otimes \cdots \otimes \left(\varepsilon^{ef-1} \circ \text{dét}\right) \mathrm{St}_{\lambda}\right),$$

et notons $V_{\lambda}^{\varepsilon}$ son espace. $\mathrm{St}_{\lambda}^{\varepsilon}$ est une induite de représentation irréductible de carré intégrable ; d'après **[19]**, elle est irréductible, de plus, elle vérifie la propriété suivante :

$$\mathrm{St}_{\lambda}^{\varepsilon} \simeq (\varepsilon \circ \text{dét}) \mathrm{St}_{\lambda}^{\varepsilon};$$

il existe donc un opérateur d'entrelacement $A_{\lambda}^{\varepsilon} \in GL(V_{\lambda}^{\varepsilon})$, unique à une constante multiplicative près, tel que l'on ait, pour tout $g \in G$:

$$A_{\lambda}^{\varepsilon} \circ \mathrm{St}_{\lambda}^{\varepsilon}(g) = \varepsilon \circ \text{dét}(g)^{-1} \mathrm{St}_{\lambda}^{\varepsilon}(g) \circ A_{\lambda}^{\varepsilon}.$$

Fixons, pour tout λ, un tel opérateur. Pour tout $v \in \mathbb{Z}$, soit $G^H_{c,vf}$ l'ensemble des éléments de G^H compacts (c'est-à-dire dont toutes les valeurs propres dans la clôture algébrique de F ont même valuation) et dont la valuation du déterminant (dans G) est vf. Soit enfin pour tout $k \in \mathbb{Z}$, 1_k la fonction caractéristique des éléments de G dont la valuation du déterminant vaut k, et 1_c la fonction caractéristique des éléments compacts de G. On a la proposition suivante (4.1.1) :

Proposition 1. — *Soit $v \in \mathbb{Z}$. Posons :*

$$l = \frac{m}{\operatorname{pgcd}(m, v)}.$$

Alors pour tout $\lambda \in \mathcal{P}^0(m/l)$, il existe une unique fonction :

$$s^\varepsilon_\lambda : G^H_{c,vf} \longrightarrow \mathbb{C}$$

telle que pour tout $\gamma \in G^H_{c,vf}$, et tout $\mathfrak{f} \in \mathcal{F}^{\mathcal{E}}$, on ait :

$$I^\varepsilon_G(\mathfrak{f}, \gamma) = \sum_{\lambda \in \mathcal{P}^0(m/l)} s^\varepsilon_\lambda(\gamma) \operatorname{tr} A^\varepsilon_{l\lambda} \circ \mathrm{St}^\varepsilon_{l\lambda}(1_{vf} 1_c \mathfrak{f}).$$

On a un résultat analogue sur H, en considérant cette fois l'espace $\mathcal{H}_H$ des fonctions sur H biinvariantes par le sous-groupe d'Iwahori standard I_H de H ; on obtient donc des fonctions $s_{\lambda,H}$, $\lambda \in \mathcal{P}^0(m/l)$.

Pour $v = 0$, soit $S_{2,G}$ (resp. $S_{2,H}$) l'espace vectoriel engendré par les $\Delta_{\varepsilon,G} s^\varepsilon_{\lambda,G}$ (resp. les $s_{\lambda,H}$) ; $S_{2,G}$ ne dépend pas du choix des $A^\varepsilon_{l\lambda}$. En les normalisant convenablement (comme décrit dans 1.4), on obtient la proposition suivante (5.1.1) :

Proposition 2. — *Soit $v \in \mathbb{Z}$, et soit $\gamma \in G^H_{c,vf}$ tel que $F[\gamma]/F$ est produit d'extensions modérément ramifiées de F, et γ_H une image de γ dans H. On a pour tout $\lambda \in \mathcal{P}^0(m/l)$:*

$$\Delta_{\varepsilon,G}(\gamma, \gamma_H) s^\varepsilon_{\lambda,G}(\gamma) = \varepsilon_1 s_{\lambda,H}(\gamma_H),$$

où ε_1 vaut ± 1 et ne dépend pas de λ.

ε_1 sera défini plus précisément par la suite. Un corollaire immédiat de cette proposition est que $S_{2,G} = S_{2,H}$. On vérifie enfin que ces espaces sont bien égaux respectivement aux espaces $S_{1,G}$ et $S_{1,H}$ engendrés par les germes de Shalika sur G et sur H, ce qui permet de conclure.

Pour montrer la première proposition, on procède de la manière suivante : on déduit d'un théorème de Kazhdan que l'on peut écrire la distribution $I^\varepsilon_G(\cdot, \gamma)$ en fonction des $\operatorname{tr} A_\pi \circ \pi(1_{vf} 1_c \cdot)$, où π est une représentation irréductible tempérée de G telle que $\pi \simeq (\varepsilon \circ \mathrm{dét})\pi$ et A_π est l'opérateur d'entrelacement correspondant, défini à une constante multiplicative près. Lorsque, pour $\eta \in \mathcal{E}$,