

MÉMOIRES DE LA S. M. F.

BERTRAND LEMAIRE

Intégrales orbitales sur $GL(N, F)$ où F est un corps local non archimédien

Mémoires de la S. M. F. 2^e série, tome 70 (1997)

http://www.numdam.org/item?id=MSMF_1997_2_70__R1_0

© Mémoires de la S. M. F., 1997, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Mémoires de la S. M. F. » (<http://smf.emath.fr/Publications/Memoires/Presentation.html>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

INTÉGRALES ORBITALES SUR $GL(N, F)$ OÙ F EST UN CORPS LOCAL NON ARCHIMÉDIEN

Bertrand Lemaire

Résumé. — Soient F un corps commutatif localement compact non archimédien de caractéristique $p \geq 0$ et N un entier ≥ 2 . Nous prouvons en détail les résultats de base de la théorie des intégrales orbitales sur $G = GL(N, F)$, résultats pour la plupart connus mais non encore rédigés pour $p > 0$: convergence, propriétés de descente, développement en germes au voisinage d'un point d'orbite fermée et leur indépendance linéaire, caractérisation sur l'ensemble des éléments absolument semi-simples réguliers, densité des intégrales orbitales absolument semi-simples régulières dans l'espace des distributions invariantes. Le traitement des éléments inséparables, i.e. ceux dont une au moins des composantes irréductibles du polynôme minimal est inséparable sur F , nous conduit à découper les nappes de Dixmier de G en sous-nappes et à produire une normalisation $J^G(f, x)$ ($f \in C_c^\infty(G)$, $x \in G$) des intégrales orbitales sur G induisant, pour toute fonction $f \in C_c^\infty(G)$, une application $x \mapsto J^G(f, x)$ localement constante sur chacune de ces sous-nappes.

Abstract. — Let F be a non-archimedean locally compact field of characteristic $p \geq 0$ and N an integer ≥ 2 . We prove in detail the basic results of the orbital integral theory on $GL(N, F)$. Most of them are already known but had never been written before for $p > 0$: convergence, reduction formulas, germ expansion in a neighbourhood of a point in a closed orbit and linear independence of the germs, characterization on the set of regular absolutely semi-simple elements, density of the regular absolutely semi-simple orbital integrals in the space of invariant distributions. The treatment of the inseparable elements, i.e. those whose minimal polynomial has at least one component inseparable on F , leads us to break down the Dixmier strata of G in sub-strata and to produce a normalization $J^G(f, x)$ ($f \in C_c^\infty(G)$, $x \in G$) of the orbital

integrals on G which induce, for all $f \in C_c^\infty(G)$, a map $x \mapsto J^G(f, x)$ locally constant on each of these sub-strata.

Table des matières

1. Introduction	1
1.1. Préambule	1
1.2. Description des résultats	2
2. Les classes de conjugaison de G	7
2.1. Notations	7
2.2. Paramétrisation des orbites de G	8
2.3. Fermeture des orbites de G	9
2.4. Lexique	12
2.5. Nappes de Dixmier	14
2.6. Sous-nappes des nappes de Dixmier	17
2.7. Décompositions standards	20
2.8. Fermeture des « orbites paraboliques » de G	20
3. Intégrales orbitales sur G	23
3.1. Notations	23
3.2. Convergence	23
3.3. Descente parabolique	26
3.4. Normalisation « I »	28
3.5. Germes au voisinage d'un élément semi-simple	32
3.6. Homogénéité des germes au voisinage d'un élément central	37
3.7. Commentaire	41
4. Normalisation « J » des intégrales orbitales sur G	43
4.1. Introduction	43
4.2. Rappels sur les constructions de Bushnell et Kutzko	43
4.3. Un lemme d'entrelacement ; application	45
4.4. Définition de la normalisation « J »	50
4.5. Comparaison avec la normalisation standard	53

5. Indépendance linéaire des germes	59
5.1. Introduction	59
5.2. Rappels sur les éléments minimaux de Bushnell et Kutzko	60
5.3. Lemmes techniques	60
5.4. Descente centrale d'intégrales orbitales sur G	65
5.5. Le lemme-clé	78
5.6. Indépendance linéaire des germes	78
6. Caractérisation des intégrales orbitales sur G et théorème de densité	85
6.1. Caractérisation	85
6.2. Densité	90
Bibliographie	93

CHAPITRE 1

INTRODUCTION

1.1. Préambule

Ce papier ne prétend pas à l'originalité dans la mesure où il contient relativement peu de résultats vraiment nouveaux. D'ailleurs, nous conseillons aux spécialistes de commencer la lecture directement à partir de la section 4. Nous avons essayé de rassembler, en rédigeant complètement les démonstrations introuvables dans la littérature, les résultats de base de la théorie des intégrales orbitales sur $G = GL(N, F)$ où F est un corps commutatif localement compact non archimédien (non discret) de caractéristique $p \geq 0$ et N un entier ≥ 2 . Insistons sur le fait que pour $p = 0$, et même, plus généralement, pour p ne divisant pas N , on dispose aujourd'hui de résultats beaucoup plus profonds — et très souvent valables pour n'importe quel groupe réductif connexe défini sur F — que ceux présentés ici. Pour $p > 0$ en revanche, la théorie est beaucoup moins avancée ; d'où l'intérêt de disposer d'un terrain solide permettant plus tard d'approfondir cette théorie, voire de l'étendre à d'autres groupes que le groupe $GL(N)$. Cette rédaction nous a semblé nécessaire pour plusieurs raisons : si la philosophie générale veut que la plupart des énoncés relatifs à l'analyse harmonique sur $GL(N)$, vrais en caractéristique nulle « passent » à la caractéristique > 0 , les arguments utilisés sont parfois bien différents d'une caractéristique à l'autre ; les techniques que nous présentons, de nature essentiellement algébrique, sont toutes indépendantes de la caractéristique ; la normalisation des intégrales orbitales sur G (issue des travaux de Bushnell-Kutzko [BK]) introduite dans la section 4, semble particulièrement adaptée, si p divise N , aux problèmes liés au nombre infini de classes de conjugaison de sous-groupes de Cartan de G ; un outil, donc, pour de prochains travaux.

1.2. Description des résultats

L'article s'organise en cinq sections, auxquelles s'ajoute la présente introduction.

Dans la section 2, on rappelle la structure des classes de conjugaison de G en insistant sur les particularités issues de la caractéristique > 0 . Les complications sont essentiellement dues à la présence, si p divise N , d'éléments *inséparables*, i.e. dont une au moins des composantes irréductibles du polynôme minimal est inséparable sur F , instables par extension algébrique du corps de base. On a en particulier deux notions d'élément semi-simple [B] Alg. VII, §9 : les éléments *absolument semi-simples*, i.e. qui restent semi-simples lorsque considérés dans $GL(N, \bar{F})$ pour une clôture algébrique $\bar{F}$ de F , et les éléments *semi-simples inséparables*. Au voisinage de ces derniers, les techniques classiques en caractéristique nulle fondées sur le déploiement d'un sous-groupe de Cartan de G par extension séparable (finie) du corps de base sont inutilisables : les orbites inséparables « dégénèrent » par extension radicielle de F , cf. la remarque (2.4.1). De plus, la décomposition de Jordan en parties semi-simple et unipotente commutant entre elles, couramment utilisée dans la théorie des intégrales orbitales en caractéristique nulle, n'existe pas pour les éléments inséparables. On note $\tilde{G} \subset G$ l'ensemble des éléments séparables et $\tilde{G}_r \subset \tilde{G}$ l'ensemble des éléments réguliers absolument semi-simples.

Une orbite $O_G(s)$ ($s \in G$) est fermée dans G (pour la topologie ϖ -adique sur G où ϖ désigne une uniformisante de F) si et seulement si s est semi-simple, et pour tout $x \in G$, la proposition (2.3.1) décrit explicitement la fermeture $\overline{O_G(x)}$ de l'orbite $O_G(x)$ dans G ; en particulier $\overline{O_G(x)}$ contient une unique orbite fermée : l'*orbite fermée associée à x* . Un élément $x \in G$ est dit *irréductible* (resp. *elliptique*) si son polynôme minimal (resp. caractéristique) est irréductible sur F .

On reprend la décomposition de G en nappes de Dixmier utilisée dans [BDKV], décomposition que l'on affine en stratifiant chaque nappe en sous-nappes : une sous-nappe $X_{\alpha, \beta}$ d'une nappe X_α est l'ensemble des éléments de X_α dont l'orbite fermée associée est contenue dans la nappe X_β . Les propriétés topologiques des nappes et des sous-nappes sont décrites en 2.5 et 2.6.

En 2.8, on rappelle la généralisation aux orbites quelconques, rédigée par Laumon [La], des constructions de Howe pour les orbites unipotentes [Ho]. Signalons le rôle central du lemme (2.8.1) dans la théorie des intégrales orbitales puisque c'est grâce à lui qu'on peut dans la section 3 montrer leur convergence.

Dans la section 3, on établit, avec une attention particulière aux questions de normalisation, les propriétés fondamentales des intégrales orbitales sur G . La preuve de leur convergence, rédigée par Laumon [La] sur des idées de [BDKV] généralisant le travail de Howe [Ho] pour les intégrales orbitales unipotentes, est basée sur la notion de descente parabolique : pour tout $x \in G$ et toute

fonction $f \in C_c^\infty(G)$, l'intégrale orbitale sur G de f au point x se réduit, via descente parabolique, à l'intégrale orbitale sur un sous-groupe de Lévi M de G d'une fonction $f_M \in C_c^\infty(M)$ en un point $x_M \in M$ (la composante de x sur M) irréductible dans M (3.3.1), d'où la convergence puisque l'orbite $O_M(x_M)$ est fermée dans M ; de plus, si L est un sous-groupe de Lévi contenant le centralisateur de x dans G , l'intégrale orbitale sur G de f au point x se réduit, via descente parabolique, à l'intégrale orbitale sur L au point x d'une fonction $f_L \in C_c^\infty(L)$ (3.3.3). On appelle *normalisation* des intégrales orbitales sur G la donnée, pour chaque orbite O de G , d'une mesure $\text{Ad}G$ -invariante non nulle sur O . En 3.4, on définit naturellement à partir des éléments irréductibles de G et de la propriété de descente (3.3.1), une normalisation « I » des intégrales orbitales sur G compatible à la propriété de descente (3.3.3).

Les points suivants sont cités dans [BDKV] mais, à notre connaissance, non rédigés pour $p > 0$; on a donc puisé avec circonspection dans la littérature écrite en caractéristique nulle (principalement la thèse de Rogawski [R 1] et l'article de Vignéras [V]) : développement en germes au voisinage d'un élément semi-simple (3.5.2) et formule d'homogénéité des germes au voisinage d'un élément central (3.6.2). Insistons sur le fait — trop souvent négligé — que ces germes, en tant que germes d'intégrales orbitales sur G , dépendent étroitement de la normalisation des dites intégrales orbitales que l'on a choisie. Pour tout sous-groupe de Lévi L contenant le centralisateur dans G d'un élément semi-simple s de G , les germes (définis par la normalisation « I ») au voisinage de s dans L sont les restrictions à L des germes (définis par la normalisation « I ») au voisinage de s dans G (3.5.5). La propriété d'indépendance linéaire des germes (définis par n'importe quelle normalisation des intégrales orbitales sur G) est montrée dans la section 5.

Dans la section 4, on présente une approche nouvelle, adaptée au traitement des éléments inséparables. L'idée, suggérée dans [DK] puis [BDKV], est de produire une normalisation des intégrales orbitales sur G induisant, pour toute fonction $f \in C_c^\infty(G)$, une application «intégrale orbitale de f » localement constante sur chacune des sous-nappes de G . Notons qu'il n'existe pas de normalisation des intégrales orbitales sur G induisant, pour toute fonction $f \in C_c^\infty(G)$, une application «intégrale orbitale de f » localement constantes sur les nappes de Dixmier, cf. la remarque (4.4.3). Pour ce faire, on réduit comme dans la section 3 le problème aux éléments irréductibles, éléments au voisinage desquels on dispose des fines constructions de Bushnell-Kutzko [BK]. Si $s \in G$ est irréductible, considérons une *strate simple* $[\mathcal{G}, n_F(s), -(k_F(s) + 1), s]$ où $\mathcal{G}$ est un $\mathcal{O}_F$ -ordre héréditaire dans $M(N, F)$ normalisé par $F[s]^\times$ et maximal pour cette dernière condition; pour la notion de strate simple et la définition des entiers $n_F(s)$ et $k_F(s)$, on renvoie à 4.2. Soit alors dg_s la mesure de Haar

sur le centralisateur G_s de s dans G définie par

$$\text{vol}(\{g \in G : g^{-1}sg \in s + J_G^{k_F(s)+1}\}, \frac{dg}{dg_s}) = 1$$

où $J_G^{k_F(s)+1}$ est la puissance $(k_F(s)+1)$ -ième du radical de Jacobson de $\mathcal{G}$ et dg la mesure de Haar sur G telle que $\text{vol}(GL(N, \mathcal{O}_F), dg) = 1$. On vérifie que dg_s ainsi définie ne dépend pas du choix de $\mathcal{G}$. Etendue par descente parabolique à tous les éléments de G , cette normalisation — dite normalisation « J » — des intégrales orbitales sur G induit, pour toute fonction $f \in C_c^\infty(G)$, une application « intégrale orbitale de f » localement constante sur chacune des sous-nappes de G (4.4.2). Comme les germes introduits dans la section 3 sont des germes d'intégrales orbitales sur G , on peut en retour (dans la section 6) caractériser les intégrales orbitales sur G définies par la normalisation « J » (6.1.2) : ce sont les fonctions Ad^*G -invariantes $\Phi : G \rightarrow \mathbf{C}$ admettant un développement en germes (définis par la normalisation « J ») au voisinage de chaque élément semi-simple de G et telles qu'il existe une partie compacte $\Omega \subset G$ telle que $\{g \in G : \Phi(g) \neq 0\} \subset \text{Ad}G(\Omega)$.

Mais revenons un instant sur cette normalisation « J ». Soit $s \in \tilde{G}$ irréductible. Posant $E = F[s]$, on a $G_s \simeq GL(d, E)$, $d[E : F] = N$. Soit alors $d\tilde{g}_s$ la mesure de Haar sur G_s telle que (en identifiant G_s avec $GL(d, E)$)

$$\text{vol}(GL(d, \mathcal{O}_E), \eta_G(s)^{-1}d\tilde{g}_s) = 1$$

avec

$$\eta_G(s) = q^{\frac{1}{2}\delta(E/F)^d} |\det_{\text{Lie}(G_s) \setminus \text{Lie}(G)}(1 - \text{Ad}s^{-1})|_F^{1/2}$$

où q est le cardinal du corps résiduel de F et $\delta(E/F)$ l'exposant du discriminant de l'extension E/F . Etendue par descente parabolique à tous les éléments de $\tilde{G}$, cette normalisation des intégrales orbitales séparables sur G induit, pour tout $x \in G$ (séparable ou non) et toute fonction $f \in C_c^\infty(G)$, une application « intégrale orbitale de f » constante au voisinage de x dans $X \cap \tilde{G}$ où X est la sous-nappe de G contenant x (4.5.1) ; en d'autres termes, il existe une constante $\lambda = \lambda_G(x) > 0$ telle que pour tout $y \in X \cap \tilde{G}$ suffisamment proche de x , la mesure dg_y sur G_y donnée par la normalisation « J » coïncide avec $\lambda^{-1}d\tilde{g}_y$.

La preuve de la propriété d'indépendance linéaire des germes (5.6.1) élaborée dans la section 5 constitue la partie la plus délicate de l'article. C'est bien entendu le cas $s \in G$ semi-simple inséparable qui pose problème : pour $s \in G$ absolument semi-simple, on peut procéder comme en caractéristique nulle, cf. la remarque (5.6.2). Fixé un élément $s \in G$ semi-simple, que l'on peut supposer irréductible grâce à la propriété de descente des germes définis par la normalisation « I » (3.5.5), toute la difficulté consiste à se ramener au cas où s est central dans G , plus précisément à réduire les intégrales orbitales sur G des fonctions $f \in C_c^\infty(G)$ au voisinage de s dans G à des intégrales orbitales sur

G_s de fonctions $\phi_f \in C_c^\infty(G_s)$ au voisinage de s (ou de 1) dans G_s . En fait, il suffit de réduire « suffisamment » d'intégrales orbitales elliptiques sur G à des intégrales orbitales elliptiques sur G_s . On y parvient, assez péniblement, grâce aux résultats de [Le 2] et à la machinerie de Bushnell-Kutzko [BK].

Dans la section 6, on prouve la caractérisation des intégrales orbitales sur G énoncée plus haut puis, grâce à la proposition (5.6.1), la variante suivante sur $\tilde{G}_r$ (6.1.3) : toute fonction Ad^*G -invariante $\tilde{\Phi} : \tilde{G}_r \rightarrow \mathbf{C}$ admettant un développement en germes (définis par *n'importe quelle* normalisation des intégrales orbitales sur G) au voisinage de chaque élément semi-simple de G et telle qu'il existe une partie compacte $\Omega \subset G$ telle que $\{g \in \tilde{G}_r : \tilde{\Phi}(g) \neq 0\} \subset \text{Ad}G(\Omega)$, est une intégrale orbitale sur G . Quant à la propriété de densité des intégrales orbitales absolument semi-simples régulières dans l'espace des distributions $\text{Ad}G$ -invariantes sur G (6.2.2) — à l'origine de cet article, puisqu'on en avait besoin pour clore la preuve de la conjecture de Howe pour G en caractéristique > 0 (cf. [Le 1] Chap. 4) —, elle s'obtient facilement grâce, à nouveau, à la propriété d'indépendance linéaire des germes (5.6.1).

Ce papier s'inspire très largement du chapitre 3 de [Le 1]. Signalons que la démonstration de la propriété d'indépendance linéaire des germes donnée dans le numéro 4.3 du dit chapitre n'est pas correcte, puisque basée sur une formule d'entrelacement fausse en général. La section 5 du présent article répare cette erreur.